オイラー，ピック，ファーレイ

小寺　裕

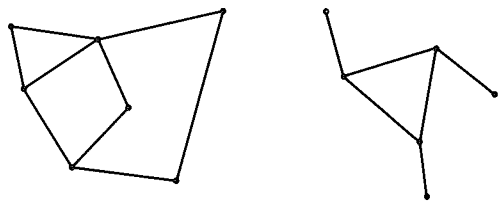
§0　はじめに

オイラーの公式（L. Euler），ピックの定理（G. Pick），ファーレイ数列（J. Farey），これら3人の名前を冠した定理や公式を紹介しながら，それらの間にある関係を示すことにする．目的は Pick の定理（定理2）と Farey 数列に関する奇麗な性質（定理3, 4）の証明である．そして，Pick の定理の証明に Euler の公式（定理1）を使う．高校数学ではあまり扱われない内容だが，数学の楽しさ，美しさを実感させる好例である．

§1　Euler の公式

定理1（Euler の公式）：平面上にかかれた頂点と辺からなる網目図形を考え，その頂点の数を v，辺の数を e，面の数を f とする．このとき次のことが成り立つ．

$$v-e+f=1$$



$v=7$
$e=9$
$f=3$
図1
$v=6$
$e=6$
$f=1$

図1のような網目図形では確かに $v-e+f=1$ となっている．いろいろな平面網をかいて，各自確かめてほしい．Euler の公式を証明するために，網目図形を $v-e+f$ の値が変わらないように変形していく．

(イ)　すべての面が三角形になるまで分割する．
多角形は対角線を引くことによって三角形に分解できるから (イ) は可能である．しかも，多角形に対角線を1本引くと，辺と面の数は各々1つずつ増えるが，頂点の数は変わらないから $v-e+f$ の値は変わらない．

(ロ)　(イ)で得られた三角形網において，1辺の外側に新しい三角形を1つ付け加えると，頂点と面の数は各々1つずつ増え，辺の数は2つ増えるから $v-e+f$ の値は変わらない．

(ハ)　網目図形の周囲の凹な所に2つの頂点を結んで新しい辺を付け加え，三角形を作っても $v-e+f$ の値は変わらない．なぜなら，頂点の数は変わらず，辺と面の数が各々1つずつ増えるからである．

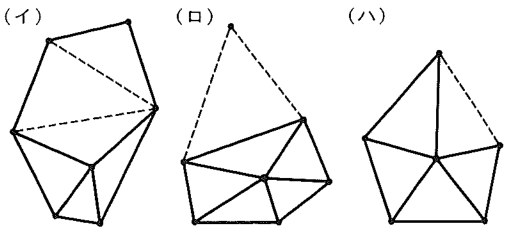


図2　図3　図4

任意の三角形網は，1つの三角形に (ロ)(ハ) の操作を繰り返し適用することによってできる．

したがって (イ) によって，任意の網目図形に対する $v-e+f$ の値は1つの三角形における $v-e+f$ の値と同じである．ただ1つの三角形からなる図形については

$$v-e+f=3-3+1=1$$

以上のことから，任意の網目図形に対して

$$v-e+f=1$$

が成り立つことがわかった．

§2　Pick の定理

Euler の公式を使って Pick の定理と呼ばれる，格子点を頂点とする多角形（以下，格子多角形と呼ぶ）の面積に関する公式を証明する．

定理 2 (Pick の定理)：平面上の格子多角形 M において，辺上にある格子点の個数を b，M の内部にある格子点の数を i とすると，その面積 $S(M)$ は次の式で表される．

$$S(M)=i+\frac{b}{2}-1$$

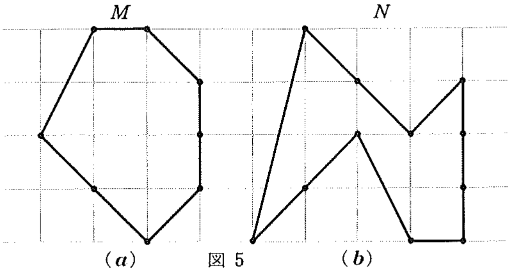


図 5

図 5 (a) のような図形 M では，その面積は

$$S(M)=5+\frac{8}{2}-1=8$$

(b) のような図形 N では

$$S(N)=3+\frac{11}{2}-1=\frac{15}{2}$$ となる．

これは，1899 年，オーストリアの数学者 G. Pick によって発見されたと言われている．
証明は 3 つのステップに分けて行う．

Step 1 (頂点のみが格子点である三角形の場合)
内部にも辺上にも格子点がなく，頂点のみが格子点である三角形 △ (以下基本三角形と呼ぶ) の面積は $\frac{1}{2}$ である．：　$S(\triangle)=\frac{1}{2}$　…… (1)

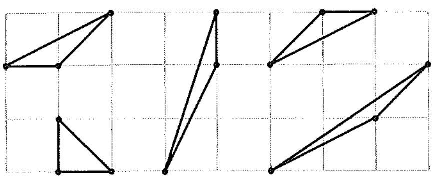


図 6　基本三角形の例

図 7 のように $\overrightarrow{OA}=(p,\ q)$ を正の向きに回転して $\overrightarrow{OB}=(r,\ s)$ となるとき，3 点 O, A, B でできる三角形の面積 $S(\triangle OAB)$ はよく知られているように

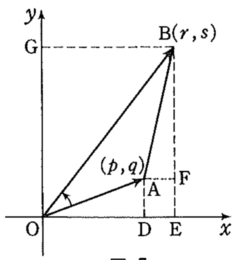


図 7

$$S(\triangle OAB)=\frac{1}{2}(ps-qr)\quad \cdots\cdots (2)$$

である．そこで，△OAB が基本三角形であるとき $ps-qr=1$ であることを以下に示す．
多角形 M の内部 (辺上は含まない) にある格子点の数を $L(M)$ と書くことにする．
△OAB を含む最小の長方形 OEBG をかく．
長方形 OEBG に含まれる格子点は全部で $(r+1)(s+1)$ 個であるが，そのうちで辺 OE, EB, BG, GO 上にあるのは全部で $2(r+1)+2(s+1)-4=2(r+s)$ 個 である．よって

$$L(\square OEBG)=(r+1)(s+1)-2(r+s)$$
$$=(r-1)(s-1)$$

したがって　$L(\triangle OBE)=\frac{1}{2}L(\square OEBG)$
$$=\frac{1}{2}(r-1)(s-1)$$

同様に $L(\triangle OAD)=\frac{1}{2}(p-1)(q-1)$

$$L(\triangle ABF)=\frac{1}{2}(r-p-1)(s-q-1)$$
$$L(\square ADEF)=(r-p-1)(q-1)$$

$L(AD)=q-1,\ L(AF)=r-p-1$
図 7 からわかるように

$$L(\triangle OBE)$$
$$=L(\triangle OAB)+L(\triangle OAD)+L(\triangle ABF)$$
$$+L(\square ADEF)+L(OA)+L(AB)$$
$$+L(AD)+L(AF)+1$$

最後の $+1$ は点Aのことである．△OAB が基本三角形より $L(\triangle OAB)=L(OA)=L(AB)=0$ であるから

$$\frac{1}{2}(r-1)(s-1)=\frac{1}{2}(p-1)(q-1)$$
$$+\frac{1}{2}(r-p-1)(s-q-1)+(r-p-1)(q-1)$$
$$+(q-1)+(r-p-1)+1$$

すなわち　$ps-qr=1$　…… (3)
これで (1) が証明できた．

Step 2：格子多角形は基本三角形に分割できる．
その方法は，まず格子多角形を格子三角形に分割し，格子三角形を基本三角形に分割すればよい．基本三角形への分割の手続は次のようになる．(図 8) まず
(Ⅰ)　格子三角形の内部にある 1 つの格子点と 3 つ

の頂点を結んで三角形を３つに分割する．

（II）　三角形の内部に格子点がないときは，辺上の格子点と反対側の頂点とを結ぶ．

操作（I）を繰り返すことによって，内部に格子点を含まない三角形にまで分割でき（図８(b)），更に（II）を繰り返せば基本三角形にまで分割できる．（図８(c)）

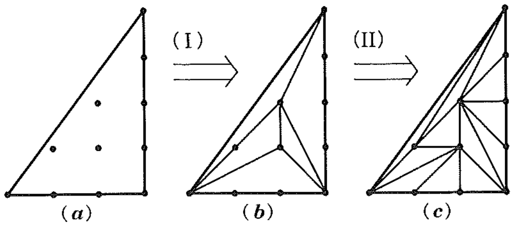


図８

Step 3：格子多角形Mを基本三角形に分割したとき，三角形の数は $2i+b-2$ である．

i はMの内部にある格子点の数，b は辺上にある格子点の数である．証明は Euler の定理を使って以下のようにする．

基本三角形に分割したときの頂点の数を v とすると

$$v=i+b \quad \cdots\cdots (4)$$

辺の数を e，面の数（三角形の数）を f とすると $e=e_1+e_2$　ここで e_1 はMの内部の辺の数，e_2 はMの辺上の辺の数である．図８の例では $e_1=14$, $e_2=8$ である．ところで，$e_2=b$，また１つの三角形の辺の数は３つであるから

$$3f=2e_1+e_2$$

$$\therefore \quad 3f=2(e-e_2)+e_2=2(e-b)+b$$

$$\therefore \quad e=\frac{1}{2}(3f+b) \quad \cdots\cdots (5)$$

(4), (5) を Euler の公式 $v-e+f=1$ へ代入して

$$i+b-\frac{1}{2}(3f+b)+f=1$$

$\therefore \quad f=2i+b-2$　これで Step 3 が示せた．

以上 Step 1, Step 2, Step 3 から

$$S(M)=\frac{1}{2}\times(2i+b-2)=i+\frac{b}{2}-1$$

となり，Pick の定理が証明できた．

§３　Farey 数列

n 次の Farey 数列 F_n とは

０と１の間にある既約分数で分母が n 以下のものを大きさの順に並べた数列 である．

例えば，F_5 は

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{1}$$

である．よって $\dfrac{b}{a}$ が F_n に属するのは a, b が互いに素で，$0\leqq b\leqq a\leqq n$ のときである．

この数列については次の２つの定理が本質的である．

> **定理３**：F_n の２つの隣り合った分数 $\dfrac{b}{a}$ と $\dfrac{d}{c}$ との間には
>
> $$ad-bc=1 \quad \cdots\cdots (6)$$
>
> が成り立つ．

> **定理４**：F_n の３つの連続する分数 $\dfrac{b}{a}$, $\dfrac{d}{c}$, $\dfrac{f}{e}$ の間には
>
> $$\frac{d}{c}=\frac{b+f}{a+e} \quad \cdots\cdots (7)$$
>
> が成り立つ．

実は，定理３と定理４は同値である．まずこのことを証明する．その後で定理３を証明しよう．

（ｉ）　定理３ ⇒ 定理４の証明

定理３を仮定すると

$$ad-bc=1, \qquad cf-de=1$$

これらを c, d について解くと

$$c=\frac{a+e}{af-be}, \qquad d=\frac{b+f}{af-be}$$

よって (7) がいえる．

ここで補題を１つ証明しておく．

> **補題**：$n>1$ のとき F_n には連続する２項で分母が同じものは存在しない．

証明は背理法でやればよい．$a>1$ で $\dfrac{b}{a}$, $\dfrac{c}{a}$ が連続する２項とすると $b+1\leqq c<a$ であるので

$$\frac{b}{a}<\frac{b}{a-1}<\frac{b+1}{a}\leqq\frac{c}{a}$$

これは $\dfrac{b}{a-1}$ が $\dfrac{b}{a}$ と $\dfrac{c}{a}$ の間にあることになり矛盾である．

（ii）　定理４ ⇒ 定理３の証明

定理４を仮定して，定理３を数学的帰納法で証明する．すなわち，F_{n-1} で定理３が成り立つと仮定し

て，F_n でも定理 3 がいえることを示す．

F_n の連続する 3 項 $\frac{b}{a}$, $\frac{d}{c}$, $\frac{f}{e}$ をとり，$\frac{d}{c}$ を F_n に属するが F_{n-1} に属さない項とする．すると $c=n$ であるから，補題より a および e は n より小さくなければならない．よって

$\frac{b}{a}$, $\frac{f}{e}$ は F_{n-1} においては連続する 2 項である．

F_{n-1} では定理 3 が成立すると仮定しているから

$$af-be=1 \quad \cdots\cdots (8)$$

仮定より (7) が成立しており，$\frac{d}{c}$ が既約分数であるから　$b+f=pd$, $a+e=pc$（p は整数）と書ける．a および e は $c(=n)$ より小さいので，$p=1$ でなければならない．したがって，$b+f=d$, $a+e=c$

$$\therefore \quad ad-bc=af-be=1 \quad (\because (8))$$

同様にして，$cf-de=af-be=1$

これで F_n においても (6) が成り立つことが示せた．

(iii)　定理 3 の証明

証明を見やすくするために F_5 を図示してみる．F_5 の分数 $\frac{b}{a}$ に格子点 (a, b) を対応させると図 9 のようになる．

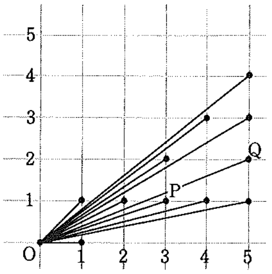


図 9

図からもわかるように F_n の各項は領域 $y \geqq 0$, $x \leqq n$, $y \leqq x$ の範囲に収まる．$\frac{b}{a}$ を表す点を $P(a, b)$ とすると，直線 OP の傾きに分数 $\frac{b}{a}$ を対応できる．すると，2 点 $P(a, b)$, $Q(c, d)$ を連続する 2 項 $\frac{b}{a}$, $\frac{d}{c}$ に対応する点とすると，辺 OP, OQ, PQ 上に格子点はなく，△OPQ の内部にも格子点はない．すなわち，△OPQ は基本三角形となり，Step 1 で示したように (3) が成り立つので $ad-bc=1$ となる．

§4　まとめ

一見何の関係もなさそうな定理 2 と定理 3 が (3) 式を媒介にして見事につながっている．(3) 式の意味は深遠である．数学的にも教育的にも意義のある教材であるように思われるので，機会があれば生徒諸君にも是非紹介していただきたい．なお，Euler の公式と Pick の定理との関係については下の [1] が詳しい．また，Farey 数列については [2] が参考になります．

References

[1]　Yu. A. Shashkin : The Euler Characteristic. Mir Publishers Moscow　1989

[2]　G. H. Hardy, E. H. Wright : An Introduction to the Theory of Numbers.　Oxford　1968

[3]　H. S. M. Coxeter : Introduction to Geometry. John Wiley & Sons　1965

[4]　ヒルベルト，コーン・フォッセン：直観幾何学 みすず書房　1970

[5]　遠山啓：数楽サロン　ほるぷ出版　1979

（こてら ひろし　東大寺学園高等学校）