関数グラフの平行移動の記号化について

秋葉　寿夫

1．はじめに

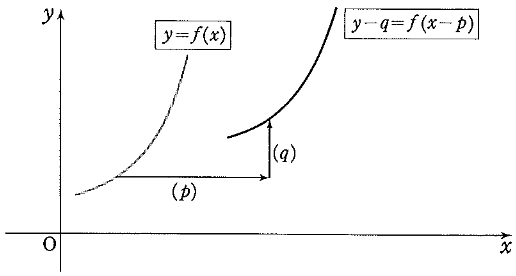
従来，関数のグラフの平行移動の指導では，平行移動の表現は記号化されていない．つまり，教科書では，通常次のように示されている．

グラフの平行移動

関数 $y=f(x)$ のグラフを，x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したグラフを表す関数の式は次のようになる．

$$y-q=f(x-p)$$

これを図示すると下図のようになる．



グラフの平行移動を，上の表現のままで指導すると，生徒はグラフの平行移動と式との関連がつかみにくく，平行移動の概念を十分理解できないことを数多く経験している．ここでは2次関数のグラフの平行移動を例にとって，グラフの平行移動の表現を記号化し，グラフの平行移動と式との関連を生徒に十分理解させる為に授業で試みていることを紹介したい．

2．平行移動の記号的表現（特に2次関数について）

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$ のグラフの指導は普通，次の(1)〜(4)の順序で行われている．

(1)　$y=ax^2$ $(a\neq0)$ のグラフ（放物線）

(2)　(1)に関連して　$\boxed{1}$ 放物線の原形　$\boxed{2}$ 形状（上に凸，下に凸）　$\boxed{3}$ 軸の方程式　$\boxed{4}$ 頂点の座標が指導される．

(3)　$y=ax^2$ $(a\neq0)$ のグラフの平行移動
$y=ax^2$ …… ① のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したときのグラフの方程式は
$y-q=a(x-p)^2$ …… ②　で与えられる．
ここで，② を2次関数の標準形という．

(4)　2次関数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$ のグラフ
$y=ax^2+bx+c$ を標準形 $y=a(x-p)^2+q$ の形に変形することで(3)によって $y=ax^2+bx+c$ のグラフは $y=ax^2$ のグラフを平行移動したものとしてとらえられることが示される．
［実際，$y=ax^2+bx+c$
$=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ と変形される］

さて，平行移動の表現の仕方は普通「$y=ax^2$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動する……」というようになっているが，これを授業の中で，次のような記号化を行うことによって，平行移動の説明を試みている．これにより平行移動の考えの記号化が可能となる．

(3)について，座標軸方向の平行移動を

$x\longrightarrow(p)$：x 軸方向に p だけ平行移動する

$\left.\begin{array}{l}p>0 \text{ のとき，右に } p \\ p<0 \text{ のとき，左に } |p|\end{array}\right\}$ だけ平行移動

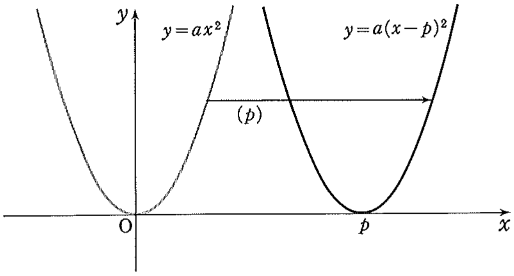
$y\longrightarrow(q)$：y 軸方向に q だけ平行移動する

$\left.\begin{array}{l}q>0 \text{ のとき，上に } q \\ q<0 \text{ のとき，下に } |q|\end{array}\right\}$ だけ平行移動

と記号化すると，平行移動による方程式の変化は，図形の変化と対応して理解される．

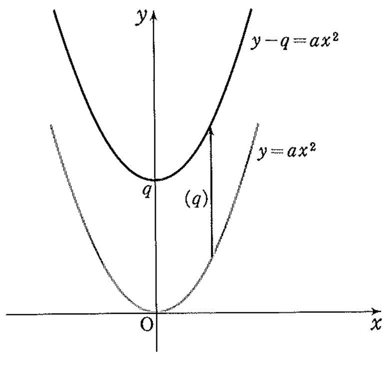
例えば，「$y=ax^2$ のグラフを x 軸方向に p だけ平行移動すると，$y=a(x-p)^2$ のグラフになる」は次のように記号化される．

$y=ax^2 \longrightarrow y=a(x-p)^2$
$x\to(p)$
[→ を − に変える]
$(x-p)$



また，「$y=ax^2$ のグラフを y 軸方向に q だけ平行移動すると，$y-q=ax^2$ のグラフになる」は次のように記号化される．

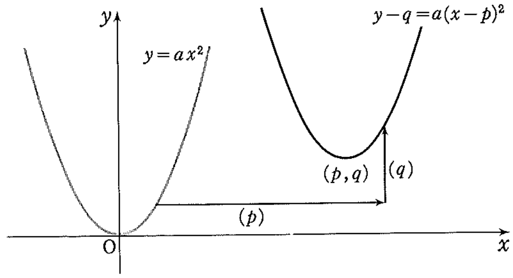
$y=ax^2 \longrightarrow (y-q)=ax^2$
$y\to(q)$
[→ を − に変える]　[$y=ax^2+q$]
$(y-q)$



上の記号化によれば，x，y について全く同じ考え方で平行移動を表現することができる．

更に，「$y=ax^2$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動すると，$y-q=a(x-p)^2$ のグラフになる」は次のように記号化される．

$y=ax^2 \longrightarrow y-q=a(x-p)^2$
$\begin{cases} x\to(p) \\ y\to(q) \end{cases}$
[→ を − に変える]
$(x-p)$
$(y-q)$



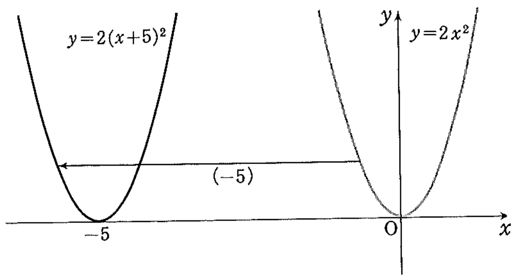
また，一般の関数 $y=f(x)$ のグラフの平行移動については，次のように記号化される．

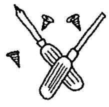
$y=f(x) \longrightarrow y-q=f(x-p)$
$\begin{cases} x\to(p) \\ y\to(q) \end{cases}$
[→ を − に変える]
$(x-p)$
$(y-q)$

以下，例を通して使い方を，まず2次関数について，更に他の関数について示してみたい．

$\boxed{例}$1．$y=2x^2$ のグラフを x 軸方向に -5 だけ平行移動したときのグラフの方程式を求めよ．

（解）　$y=2x^2 \longrightarrow y=2(x+5)^2$
$x\to(-5)$
[→ を − に変える]
$x-(-5)=x+5$
$(x+5)$



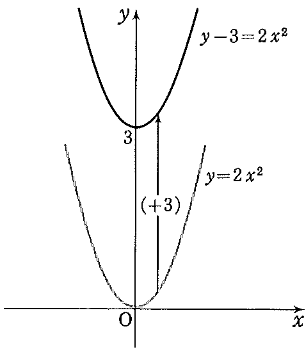


例2. $y=2x^2$ のグラフを y 軸方向に $+3$ だけ平行移動したときのグラフの方程式を求めよ.

(解)　$y=2x^2 \xrightarrow{\quad y\to(+3)\quad} y-3=2x^2$

[→ を－に変える]

$(y-3)$



例3. $y=2x^2$ のグラフを x 軸方向に $+3$, y 軸方向に -2 だけ平行移動したときのグラフの方程式を求めよ.

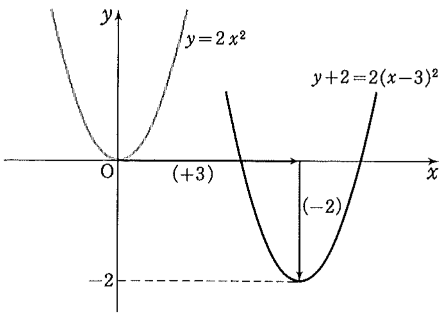
(解)　$y=2x^2 \longrightarrow y+2=2(x-3)^2$

$\begin{cases} x\to(+3) \\ y\to(-2) \end{cases}$

[→ を－に変える]

$(x-3)$

$(y+2)$



例4. $y=-2(x-1)^2+3$ のグラフは,(　　　)のグラフを x 軸方向に(　), y 軸方向に(　)だけ平行移動したものである.(　)をうめよ.

(解)　$y=-2(x-1)^2+3$ から

$y-3=-2(x-1)^2$

$\begin{cases} x\to(\quad) \\ y\to(\quad) \end{cases}$ 平行移動

$\boxed{\qquad}$ (原形)

まず, 上のような図式を書く. 原形の求め方は $y-3$, $x-1$ をそれぞれ, y, x と書いて $\boxed{y=-2x^2}$ と求められる.

次に平行移動は, $x-1$, $y-3$ でそれぞれ $-$ を $\to$ に変えて

$x\to(1)$　∴ $x\to(+1)$

$y\to(3)$　∴ $y\to(+3)$

として求められる.

図式について整理すると

◦原形の求め方

$(y-3)=-2((x-1))^2$

y　　x

$\boxed{y=-2x^2}$

◦平行移動の求め方

$y-3=-2(x-1)^2$

[－を → に変える]　　[－を → に変える]

$y\to(3)$　　$x\to(1)$

∴ $y\to(+3)$　　$\begin{cases} x\to(+1) \\ y\to(+3) \end{cases}$　　∴ $x\to(+1)$

$\boxed{y=-2x^2}$ (原形)

例5. $y=\frac{2}{3}(x+5)^2-7$ のグラフは, どのグラフを x 軸方向, y 軸方向にそれぞれどれだけずつ平行移動したものか.

(解)　$y=\frac{2}{3}(x+5)^2-7$ から

$(y+7) = \frac{2}{3}((x+5))^2$ …… ①

$y-(-7)$　　$x-(-5)$

[－を → に変える]　$\begin{cases} x\to(-5) \\ y\to(-7) \end{cases}$　[－を → に変える]

$y\to(-7)$　　$x\to(-5)$

y　　x

$\boxed{y=\frac{2}{3}x^2}$

まず, 原形は $y+7$, $x+5$ をそれぞれ y, x と書いて $y=\frac{2}{3}x^2$ と求められる.

次に平行移動は $\left.\begin{array}{l} x+5=x-(-5) \\ y+7=y-(-7) \end{array}\right\}$ で $-$ を $\to$ に変えて $\left.\begin{array}{l} x\to(-5) \\ y\to(-7) \end{array}\right\}$ と求められる.

よって, 以上から

①のグラフは $y=\frac{2}{3}x^2$ のグラフを, x 軸方向に -5, y 軸方向に -7 だけ平行移動したものである.

例6．$y=3x^2-4x+5$ のグラフを x 軸方向に $+1$，y 軸方向に -3 だけ平行移動したグラフの方程式を求めよ．

（解）

$$y=3x^2-4x+5 \;\rightarrow\; y+3=3(x-1)^2-4(x-1)+5 \quad \cdots\cdots ①$$

$\begin{cases} x\rightarrow(+1) \\ y\rightarrow(-3) \end{cases}$

［→ を－に変える］

$(x-1)$

$(y+3)$

よって，求める方程式は ① から

$$\begin{aligned} y&=3(x^2-2x+1)-4(x-1)+5-3 \\ &=3x^2-6x+3-4x+4+2 \\ &=3x^2-10x+9 \end{aligned}$$

$\therefore\; y=3x^2-10x+9$

平行移動の記号化を用いれば，平行移動と式の変化の対応が容易に理解される．

例7．2次関数 $y=-x^2+2x+1$ のグラフをかけ．

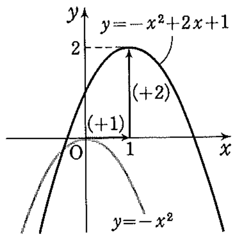
（解）まず，標準形を求める．

$$\begin{aligned} y&=-x^2+2x+1 \quad \cdots\cdots ① \\ &=-(x^2-2x)+1 \\ &=-\{(x-1)^2-1\}+1 \\ &=-(x-1)^2+2 \end{aligned}$$

$\therefore\; y-2=-(x-1)^2$

$\uparrow \begin{cases} x\rightarrow(+1) \\ y\rightarrow(+2) \end{cases}$

$y=-x^2$



よって，① のグラフは $y=-x^2$ のグラフを x 軸方向に $+1$，y 軸方向に $+2$ だけ平行移動したものである．

例8．$y=x^2+x+1$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したら，$y=x^2-3x+5$ のグラフと一致した．p，q の値を求めよ．

（解）題意より

$$y=x^2+x+1 \xrightarrow{\begin{cases} x\rightarrow(p) \\ y\rightarrow(q) \end{cases}} y-q=(x-p)^2+(x-p)+1 \quad \cdots\cdots ①$$

① から，$y=x^2-2px+p^2+x-p+1+q$

$\therefore\; y=x^2+(-2p+1)x+p^2-p+q+1$

題意より，これは $y=x^2-3x+5$ と一致するから

$-2p+1=-3$ かつ $p^2-p+q+1=5$ $\therefore\; p=2$

よって，$4-2+q+1=5$ から $q=2$

（答）$p=2$，$q=2$

以上は2次関数のグラフの平行移動について，平行移動の記号化の応用のしかたを述べた．更に，2次関数以外の関数のグラフの平行移動についてもグラフの記号化を応用してみると次のようになる．

例9．次の関数のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したときのグラフの方程式を求めよ．

(1) 1次関数 $y=ax$ $(a\neq0)$

$$y=ax \xrightarrow{\begin{cases} x\rightarrow(p) \\ y\rightarrow(q) \end{cases}} \boxed{y-q=a(x-p)}$$

（標準形 以下同じ）

(2) 分数関数 $y=\dfrac{k}{x}$ $(k\neq0)$

$$y=\frac{k}{x} \xrightarrow{\begin{cases} x\rightarrow(p) \\ y\rightarrow(q) \end{cases}} \boxed{y-q=\frac{k}{x-p}}$$

(3) 無理関数 $y=\sqrt{ax}$ $(a\neq0)$

$$y=\sqrt{ax} \xrightarrow{\begin{cases} x\rightarrow(p) \\ y\rightarrow(q) \end{cases}} \boxed{y-q=\sqrt{a(x-p)}}$$

(4) 指数関数 $y=a^x$ $(a>0$ かつ $a\neq1)$

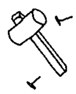
$$y=a^x \xrightarrow{\begin{cases} x\rightarrow(p) \\ y\rightarrow(q) \end{cases}} \boxed{y-q=a^{x-p}}$$

(5) 対数関数 $y=\log_a x$ $(a>0$ かつ $a\neq1)$

$$y=\log_a x \xrightarrow{\begin{cases} x\rightarrow(p) \\ y\rightarrow(q) \end{cases}} \boxed{y-q=\log_a(x-p)}$$

(6) 3次関数 $y=ax^3$ $(a\neq0)$

$$y=ax^3 \xrightarrow{\begin{cases} x\rightarrow(p) \\ y\rightarrow(q) \end{cases}} \boxed{y-q=a(x-p)^3}$$



(7) 三角関数 $y=a\sin bx$, $y=a\cos bx$,
$y=a\tan bx$

$$y=a\sin bx \xrightarrow{\begin{cases}x\to(p)\\ y\to(q)\end{cases}} \boxed{y-q=a\sin b(x-p)}$$

$$y=a\cos bx \xrightarrow{\begin{cases}x\to(p)\\ y\to(q)\end{cases}} \boxed{y-q=a\cos b(x-p)}$$

$$y=a\tan bx \xrightarrow{\begin{cases}x\to(p)\\ y\to(q)\end{cases}} \boxed{y-q=a\tan b(x-p)}$$

(8) 2次曲線 円 $x^2+y^2=r^2$, だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 放物線 $y^2=4px$

円:

$$x^2+y^2=r^2 \xrightarrow{\begin{cases}x\to(p)\\ y\to(q)\end{cases}} \boxed{(x-p)^2+(y-q)^2=r^2}$$

だ円:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \xrightarrow{\begin{cases}x\to(p)\\ y\to(q)\end{cases}} \boxed{\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=1}$$

双曲線:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \xrightarrow{\begin{cases}x\to(p)\\ y\to(q)\end{cases}} \boxed{\frac{(x-p)^2}{a^2}-\frac{(y-q)^2}{b^2}=1}$$

放物線:

$$y^2=4Px \xrightarrow{\begin{cases}x\to(p)\\ y\to(q)\end{cases}} \boxed{(y-q)^2=4P(x-p)}$$

3. おわりに

以上の諸例を通してわかるように，関数のグラフの平行移動を統一的に扱う方法として，今まで述べたグラフの平行移動の記号化は，生徒に平行移動と式との関連を把握させる方法として，かなり効果的な役割を果たすものと考えられる．今後，グラフの平行移動の指導の一助に，上に紹介したグラフの平行移動の記号化を参考にしていただければ幸いです．

（あきば ひさお　茨城県立藤代高等学校）