塩見の定理の別証について

森　茂

数研通信 数学 No. 9 に塩見の定理

> $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$, a, b, c は整数）において，$D=b^2-4ac=d^2$ なる非負整数 d が存在すれば
> $$ax^2+bx+c=(p_1x+q_1)(p_2x+q_2)$$
> となる整数 p_1, p_2, q_1, q_2 が存在する．

の証明が載っている．この事実は

「一意分解整域Rの商体をFとするとき，F[x] の可約元は R[x] においても可約元である．」

という代数学の定理によれば自明である．以下，その線に沿った定理の別証を述べる．

$f(x)=ax^2+bx+c$ とおくと

$$f(x)=a\left(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\times\left(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$$=a\left(x-\frac{-b+d}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-d}{2a}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}x+\frac{b-d}{4a}\right)(2ax+b+d)$$

$2a$ と $b+d$ の最大公約数を e とおき

$$g(x)=\frac{2ax+b+d}{e},\quad h(x)=\left(\frac{1}{2}x+\frac{b-d}{4a}\right)e$$

とすると

$g(x)\in\mathbb{Z}[x]$, $g(x)$ の係数の最大公約数は ± 1,

$h(x)\in\mathbb{Q}[x]$

$$f(x)=g(x)h(x)$$

$h(x)$ の係数の分母の最小公倍数を k として

$h_1(x)=kh(x)$ とおくと $h_1(x)\in\mathbb{Z}[x]$ で

$$kf(x)=g(x)h_1(x)$$

$f(x)$, $h_1(x)$ の係数の最大公約数をそれぞれ l, m として

$f(x)=lf_1(x)$, $h_1(x)=mh_2(x)$ とおくと

$$klf_1(x)=mg(x)h_2(x)$$

両辺の 2 次式の係数の最大公約数は等しいから

$kl=\pm m$　となって

$$f_1(x)=\pm g(x)h_2(x)$$

$$\therefore\quad lf_1(x)=\pm lg(x)h_2(x)$$

$h_0(x)=\pm lh_2(x)$ とおくと

$$f(x)=g(x)h_0(x)$$

$g(x)=p_1x+q_1$, $h_0(x)=p_2x+q_2$ とおけば

$ax^2+bx+c=(p_1x+q_1)(p_2x+q_2)$ となる．

（もり　しげる　福井県立藤島高等学校）