$\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$（$a\neq0$）と扇形の面積

竹内（たけうち）　憲治（けんじ）

§1．はじめに

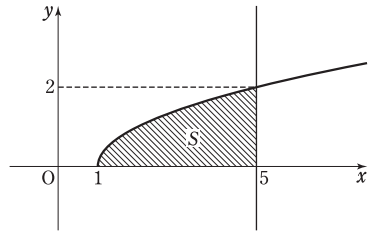
数学Ⅲの「積分法の応用」から1題。

【問題1】
次の曲線と直線で囲まれた部分の面積Sを求めよ。
$y=\sqrt{x-1}$，$x=5$，x軸

【生徒の解答】

図より

$$S=\frac{1}{6}\cdot4^3\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{16}{3}$$



出題者は$S=\int_1^5\sqrt{x-1}\,dx$を計算してほしいのだが，生徒は「$y=\sqrt{x-1}$のグラフは放物線の半分」という図形の特徴に着目し，$\frac{1}{6}$公式を用いて解答した。

上記の解答を認めてしまうと，例えば，定積分$\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx$なども$x=2\sin\theta$と置換しないで「(半径2の四分円(quadrant)の面積)$=\pi$」という解答も認めることになりかねない。

そこで，授業者は，図形の特徴については簡単に触れる程度に済ませて，それ以上深入りしないことで，上のような答案が出回らないようにする。

しかし，グラフや図形の読み取りに重きをおく高校数学の特性上，図形の特徴を活かした方法についてもう少し深めてもよいのでは，と常々と考えていた。

そこで，本稿では，無理関数の積分

$\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$（$a\neq0$）

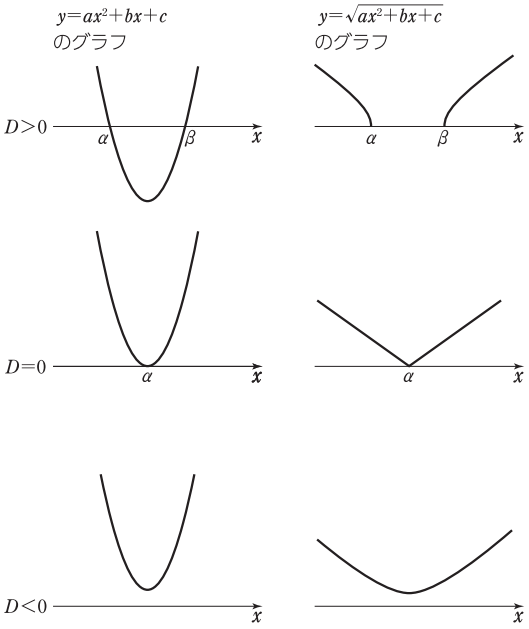
を，$y=\sqrt{ax^2+bx+c}$のグラフと直線によって作られる扇形の面積と絡めて考察したい。

§2．$y=\sqrt{ax^2+bx+c}$（$a\neq0$）のグラフ

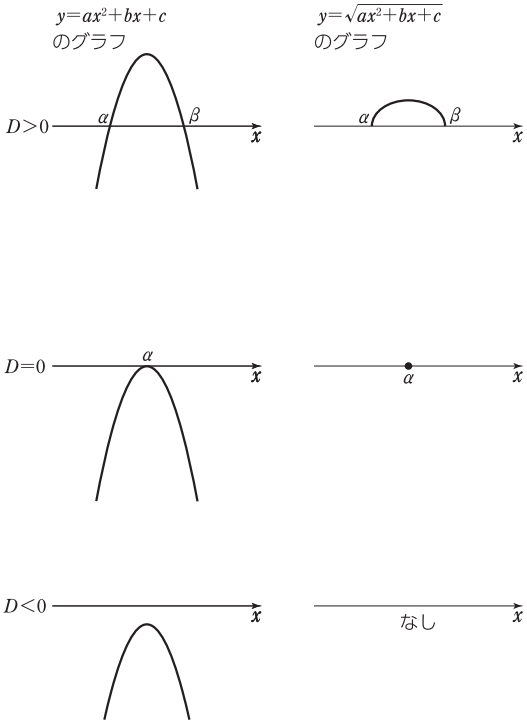
$a\neq0$のときを考える($a=0$のときは放物線の半分またはx軸に平行な直線を表す)。

2次方程式$ax^2+bx+c=0$の2解をα，β($\alpha\leqq\beta$)とし，判別式をDとするとき，概形は次の通りである。

(i)　$a>0$のとき



(ii)　$a<0$ のとき



なお，$y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ のグラフは平方完成した

$y=\sqrt{a(x-p)^2+q}$　……①

の形で表すとわかりやすい。

$q=0$ のとき

①は　$y=\sqrt{a(x-p)^2}$　……②

$a>0$：絶対値のグラフ $y=\sqrt{a}\,|x-p|$

$a<0$：(②の根号内)$\geqq 0$ より　$x=p$，$y=0$

よって　1点$(p,\ 0)$

$q\neq 0$ のとき

①^2 より　$-a(x-p)^2+y^2=q$　……③

$a>0$：$-a<0$ であり，q の符号に関わらず

双曲線 $\dfrac{-a}{q}(x-p)^2+\dfrac{1}{q}y^2=1$

の上半分$(y\geqq 0)$

$a<0$：(③の左辺)$\geqq 0$ より　$q>0$

また，$-a>0$ であるから

楕円 $\dfrac{-a}{q}(x-p)^2+\dfrac{1}{q}y^2=1$

の上半分$(y\geqq 0)$

(特に，$a=-1$ のときは上半円)

「$q=0\Leftrightarrow D=0$」であるから，まとめると

【定理Ⅰ】

$y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ $(a\neq 0)$ のグラフは，

$ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とするとき，

$D=0$：絶対値のグラフ or 1点

$D\neq 0$：双曲線の上半分 or 楕円の上半分

(特に，$a=-1$ のときは上半円)

$D=0$ は特別な場合と考えれば，条件 $a\neq 0$ を取り払った $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ のグラフは概ね「楕円・双曲線・放物線のいずれかの上半分である」という事実は，生徒にとっては新鮮かもしれない。

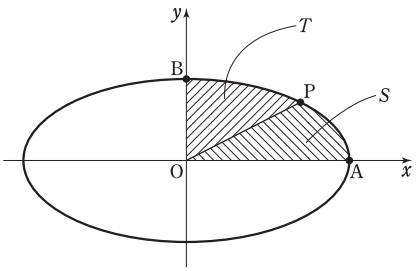
§3. 楕円と双曲線における扇形の面積

【定理Ⅱ】

$a>0$，$b>0$ とする。また，点A，Bは楕円または双曲線の頂点とする。

(1)　楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点

$\mathrm{P}(x,\ y)=\mathrm{P}(a\cos t,\ b\sin t)$ $\left(0<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$ に対して，



扇形OAPの面積 S は

$$S=\frac{1}{2}abt=\frac{1}{2}ab\cos^{-1}\frac{x}{a}$$

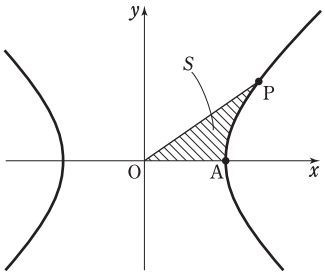
また，楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点

$\mathrm{P}(x,\ y)=\mathrm{P}(a\sin t,\ b\cos t)$ $\left(0<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$ に対して，扇形OBPの面積 T は

$$T=\frac{1}{2}abt=\frac{1}{2}ab\sin^{-1}\frac{x}{a}$$

(2) 双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上の点

$P(x,\ y)=P(a\cosh t,\ b\sinh t)$ $(t>0)$ に対して，

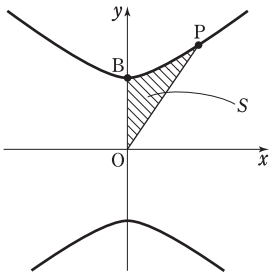


扇形OAPの面積Sは

$$S=\frac{1}{2}abt=\frac{1}{2}ab\cosh^{-1}\frac{x}{a}$$

(3) 双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ 上の点

$P(x,\ y)=P(a\sinh t,\ b\cosh t)$ $(t>0)$ に対して，



扇形OBPの面積Sは

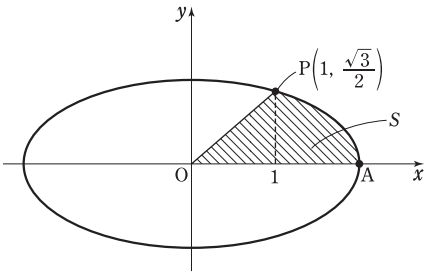
$$S=\frac{1}{2}abt=\frac{1}{2}ab\sinh^{-1}\frac{x}{a}$$

なお，(1)〜(3)において $S=\frac{1}{2}abt$ であることは，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ とおくことで証明できる。

【問題 2】

楕円 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 上の2点を $A(2,\ 0)$，$P\left(1,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ とするとき，扇形OAPの面積Sを求めよ。

【解答】



$a=2$，$b=1$，$x=1$ であるから，**【定理Ⅱ】**(1)より

$S=\frac{1}{2}\cdot2\cdot1\cdot\cos^{-1}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$

§4. $\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ $(a\neq0)$ と扇形の面積

前節の**【定理Ⅱ】**から

$y=\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-p)^2+q}$ $(q\neq0)$

によって作られる扇形の面積Sは

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{|q|}{\sqrt{|a|}}t \qquad \cdots\cdots(☆)$$

で与えられる。ただし，楕円のとき $0<t<\frac{\pi}{2}$，双曲線のとき $t>0$ である。

証明は省略する。この等式(☆)を使って，次にあげる有名な公式を証明する。

【定理Ⅲ】

$a>0$ とする。また，積分定数は省略する。

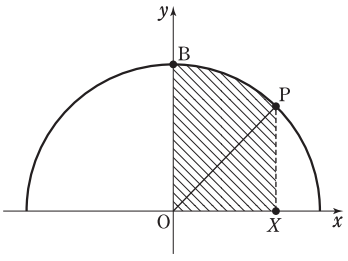
(1) $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)$

(2) $\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\sinh^{-1}\frac{x}{a}\right)$

(3) $\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\cosh^{-1}\frac{x}{a}\right)$

【証明】

(1) $y=\sqrt{a^2-x^2}$ のグラフは上半円。



ここで，$X=a\sin t \Leftrightarrow t=\sin^{-1}\dfrac{X}{a}$ とすると

$\displaystyle\int_0^X \sqrt{a^2-x^2}\,dx$

$=(\triangle \mathrm{OXP})+(\text{扇形 OBP})$

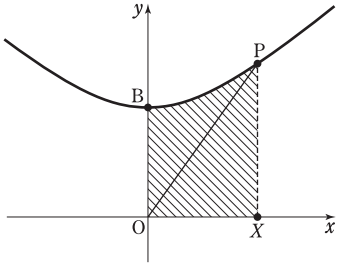
$=\dfrac{1}{2}X\sqrt{a^2-X^2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a^2}{\sqrt{|-1|}}\cdot\sin^{-1}\dfrac{X}{a}$ （☆より）

$=\dfrac{1}{2}\left(X\sqrt{a^2-X^2}+a^2\sin^{-1}\dfrac{X}{a}\right)$

よって

$\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)$

(2)　$y=\sqrt{x^2+a^2}$ のグラフは双曲線の上半分。



ここで，$X=a\sinh t \Leftrightarrow t=\sinh^{-1}\dfrac{X}{a}$ とすると

$\displaystyle\int_0^X \sqrt{x^2+a^2}\,dx$

$=(\triangle \mathrm{OXP})+(\text{扇形 OBP})$

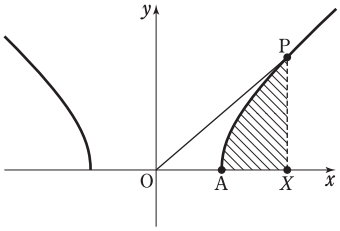
$=\dfrac{1}{2}X\sqrt{X^2+a^2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a^2}{\sqrt{1}}\cdot\sinh^{-1}\dfrac{X}{a}$ （☆より）

$=\dfrac{1}{2}\left(X\sqrt{X^2+a^2}+a^2\sinh^{-1}\dfrac{X}{a}\right)$

よって

$\displaystyle\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\sinh^{-1}\frac{x}{a}\right)$

(3)　$y=\sqrt{x^2-a^2}$ のグラフは双曲線の上半分。



ここで，$X=a\cosh t \Leftrightarrow t=\cosh^{-1}\dfrac{X}{a}$ とすると

$\displaystyle\int_a^X \sqrt{x^2-a^2}\,dx=(\triangle \mathrm{OXP})-(\text{扇形 OAP})$

$=\dfrac{1}{2}X\sqrt{X^2-a^2}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{|-a^2|}{\sqrt{1}}\cdot\cosh^{-1}\dfrac{X}{a}$ （☆より）

$=\dfrac{1}{2}\left(X\sqrt{X^2-a^2}-a^2\cosh^{-1}\dfrac{X}{a}\right)$

よって

$\displaystyle\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\cosh^{-1}\frac{x}{a}\right)$

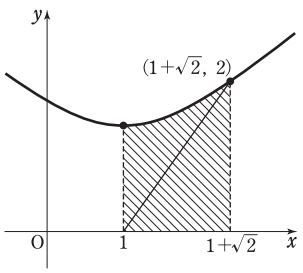
【定理Ⅲ】は暗記してもよいが，次の問題の解答のようにすれば，等式(☆)の暗記だけで済む。

【問題 3】

次の定積分を求めよ。

$\displaystyle\int_1^{1+\sqrt{2}}\sqrt{x^2-2x+3}\,dx$

【解答】



(与式)$=\displaystyle\int_1^{1+\sqrt{2}}\sqrt{(x-1)^2+2}\,dx$

であるから，$x-1=\sqrt{2}\sinh t$ とおくと

(与式)=(三角形)+(扇形)

$=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 2+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{1}}\cdot\sinh^{-1}\dfrac{(1+\sqrt{2})-1}{\sqrt{2}}$

$=\sqrt{2}+\sinh^{-1}1$

また，$\sinh^{-1}1=\log(1+\sqrt{2})$ を用いて

(与式)$=\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})$

としてもよい。と言うのは，逆双曲線関数には次の性質があるからだ。

【性質】

(1)　$\sinh^{-1}x=\log(x+\sqrt{x^2+1})$，$-\infty<x<\infty$

(2)　$\cosh^{-1}x=\log(x+\sqrt{x^2-1})$，$1\leqq x<\infty$

このことは

$y=\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，$y=\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

の逆関数を求めれば示される。**【性質】**の証明に係る類題が，参考文献〔3〕にも紹介されている。

【演習】（参考文献〔3〕$p.14$ 演習問題 B 7）

$x \geqq 0$ で定義された関数 $y=\dfrac{3^x+3^{-x}}{2}$ の逆関数を求めよ。

【解答】 $y=\log_3(x+\sqrt{x^2-1})\ (x \geqq 1)$

ちなみに**【問題 3】**を通常の方法 $x-1=\sqrt{2}\tan\theta$ で置換すると，$\displaystyle\int\frac{d\theta}{\cos^3\theta}$ や $\displaystyle\int\frac{d\theta}{\cos\theta}$ や $\tan\frac{3}{8}\pi$ などの計算が出てきてかなり苦労する。

この**【性質】**を用いると**【定理Ⅲ】**(2)，(3)は，次の**【定理Ⅲ′】**(4)，(5)のように表される。

【定理Ⅲ′】

$a>0$ とする。また，積分定数は省略する。

(4) $\displaystyle\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\sinh^{-1}\frac{x}{a}\right)$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\{x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\log(x+\sqrt{x^2+a^2})\}$

(5) $\displaystyle\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\cosh^{-1}\frac{x}{a}\right)$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\{x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\log(x+\sqrt{x^2-a^2})\}$

ただし，(5)では $x \geqq a$ とする。積分定数は省略したが，第 1 の等号と第 2 の等号とでは，積分定数が異なることに留意してほしい。

§5. 応用問題

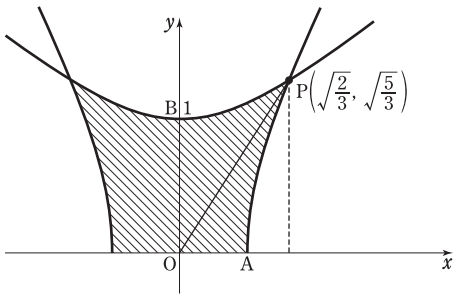
扇形の面積を用いて，もう少し複雑な図形の面積を求めてみよう。

【問題 4】

次の曲線と直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$y=\sqrt{x^2+1}$，$y=\sqrt{4x^2-1}$，x 軸

【解答】



$S=2\times\{(\text{扇形 OAP})+(\text{扇形 OBP})\}$

$\displaystyle=2\times\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{|-1|}{\sqrt{4}}\cdot\cosh^{-1}2\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1}}\cdot\sinh^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\cosh^{-1}\frac{2\sqrt{6}}{3}+\sinh^{-1}\frac{\sqrt{6}}{3}$

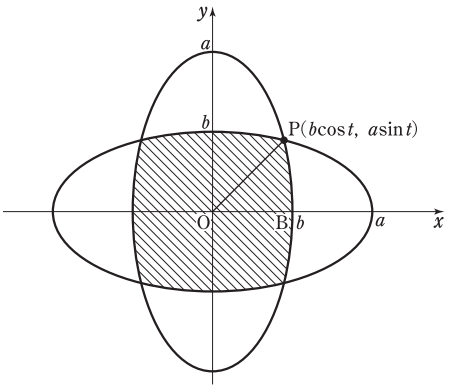
【問題 5】（参考文献〔4〕$p.326$ 問題[2](3) 改）

2 つの楕円

$\displaystyle\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$\displaystyle\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

に共通な部分の面積 S を求めよ。ただし，$a>b>0$ とする。

【解答】



$S=8\times(\text{扇形 OBP})$

$\displaystyle=8\times\frac{1}{2}abt$

$=4abt$ ……①

図形の対称性より，t は $b\cos t=a\sin t$ を満たすから　$\tan t=\dfrac{b}{a}$

ゆえに　$\displaystyle t=\tan^{-1}\frac{b}{a}$ ……②

①，②より

$\displaystyle S=4ab\tan^{-1}\frac{b}{a}$

§6. まとめ

複数の $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ $(a\neq 0)$ 形のグラフや直線で囲まれた図形の面積は，いくつかの三角形と扇形に分割することで比較的容易に求められる。

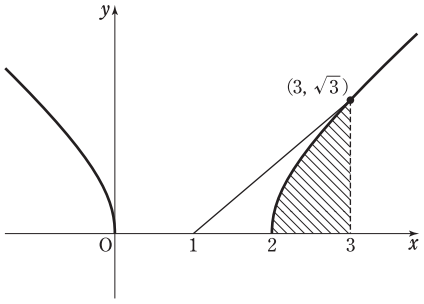
もしも，図形の中に $a=0$ である $y=\sqrt{bx+c}$ 形のグラフが含まれても，その場合は扇形ではなく，放物線の弓形の面積を求める $\dfrac{1}{6}$ 公式を使用すればよい。最後に確認問題を 1 題。

【問題 6】

次の定積分を求めよ。

$$\int_2^3 \sqrt{x^2-2x}\,dx$$

【解答】



(与式)$=\int_2^3 \sqrt{(x-1)^2-1}\,dx$

であるから，$x-1=\cosh t$ とおく。

このとき

(与式)＝(三角形)－(扇形)

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{|-1|}{\sqrt{1}}\cdot\cosh^{-1}2$$

$$=\sqrt{3}-\frac{1}{2}\cosh^{-1}2=\sqrt{3}-\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})$$

《参考文献》

〔1〕 ウラジミル・イワノビッチ・スミルノフ著，彌永昌吉他 5 名　翻訳監修「スミルノフ高等数学教程 2－Ⅰ巻[第二分冊]－」共立出版(1958)

〔2〕 河村哲也　監訳，井元薫　訳「高等数学公式便覧」朝倉書店(2013)

〔3〕 「新課程　教科書傍用　4 STEP　数学Ⅲ」数研出版(2023)

〔4〕 福田安蔵他 3 名　共編「詳解 微積分演習Ⅰ」共立出版(1960)

(鳥取県立鳥取湖陵高等学校)