初手分け（場合の数漸化式）の極意とオリジナル教材による指導法

前川原（まえかわら）　佑介（ゆうすけ）

§1. はじめに

きっかけは，2025 年の東京大学前期入試数学（理科）第 5 問の「場合の数漸化式」である。改めて，これまで解き溜めた大学入試問題を見返したとき，生徒たちが漸化式の立式を本質的に理解するための題材が乏しいと感じた。そこで，最難関大志望者への指導として筆者が作成したオリジナル教材の一部を本稿で紹介する。

§2. オリジナル教材

【問題】

数字 1，2，3 を n 個（$n \geqq 3$）並べてできる n 桁の自然数全体のうち，[12]が含まれない自然数の個数を a_n，[123]が含まれない自然数の個数を b_n，[12]と[23]がともに含まれない自然数の個数を c_n とおく。ただし，各数字は何回用いてもよい。

例えば，112312，132123　は[12]を含む。

321321，211323　は[12]を含まない。

(1)　a_{n+2} を a_{n+1}，a_n を用いて表せ。

(2)　b_{n+3} を b_{n+2}，b_{n+1}，b_n を用いて表せ。

(3)　c_{n+3} を c_{n+2}，c_{n+1}，c_n を用いて表せ。

最終目標は(3)を解くことであるが，(1)，(2)の後に次の(4)～(9)のように d_n から I_n までの各漸化式の立式を行う問題を扱う。

(4)　[12]と[13]がともに含まれない数の個数を d_n

(5)　[12]と[32]がともに含まれない数の個数を e_n

(6)　[11]と[12]がともに含まれない数の個数を f_n

(7)　[12]と[21]がともに含まれない数の個数を g_n

(8)　[11]と[22]がともに含まれない数の個数を h_n

(9)　[12]と[33]がともに含まれない数の個数を I_n

§3. 初手分け理論

「条件」を満たすような n 桁の自然数の総数を求める問題の代表例として，「条件」を満たすように n 個の物に色を塗る方法の総数を求める問題などがある。



$(n+1)$個の□（a_{n+1}個）

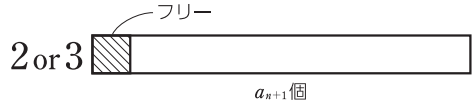


初手分け　　n個の□

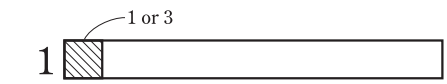
（$f(a_k)$個，$k=1$，……，n）

目標は「場合の数漸化式の立式」であり，基本方針は，a_{n+2} or a_{n+1} 個の内訳を考えることである。それを左記の(1)を用いて解説していく。

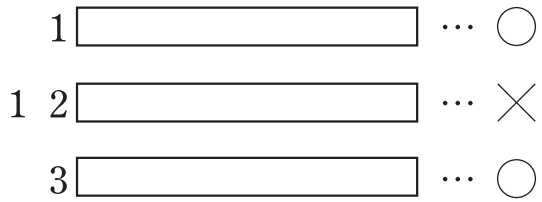
まず，a_{n+2} 個の内訳を考える。[12]が含まれないという条件であるから，2，3 の右側の数には制限がなく，フリーな状況ゆえ，2，3 から始まる自然数の個数はおのおの a_{n+1} 個と表せる。



よって，2，3 から始まる自然数は全部で $2a_{n+1}$ 個ある。ここで重要なのは，各数字で始まる自然数がある単項式 a_k のみで表せるかどうかの判断である。1 の右側の数には制限があるため，1 から始まる自然数は a_{n+1} 個ではない。つまり，ある単項式 a_k のみで表すことができないのである。



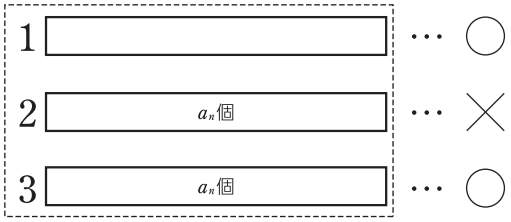
そこで，次図へ移行する。



まず，上図において，○の自然数を数え上げていく。

【方針1】○の自然数を直接数える。

しかし，このままでは制限下にある自然数1□が数えられず失敗するので，**【方針2】集合を利用する（×の自然数を除く）**。



点線部分の自然数の総数は　a_{n+1} 個

× の自然数は，2 の右側に制限がないので　a_n 個

よって，11 または13 から始まる自然数の個数は $(a_{n+1}-a_n)$ 個と表せる。

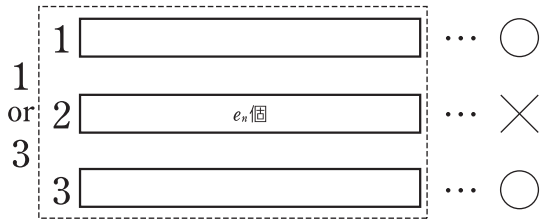
以上より　$a_{n+2}=(a_{n+1}-a_n)+2a_{n+1}$

$a_{n+2}=3a_{n+1}-a_n$

§4. 演習課題

(1)の解説後，生徒たちは(4)，(5)を自力で立式できた。(4)は2 項間，3 項間漸化式ともに立式できる。以下では，(5)を**【方針2】**で解説する。

e_{n+2} 個の内訳は以下の通り(2 の後が e_k のみの式で表せる)。



1，3 から始まる自然数の個数は点線部分の自然数 e_{n+1} 個から，× の e_n 個を除いたものであり，



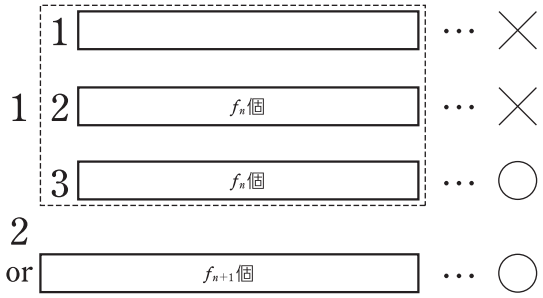
2 から始まる自然数は e_{n+1} 個ある。

以上より　$e_{n+2}=2(e_{n+1}-e_n)+e_{n+1}$

$e_{n+2}=3e_{n+1}-2e_n$

(6)は**【方針1】**で立式できる稀有なケースである。

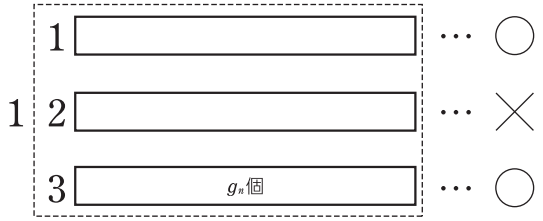
f_{n+2} 個の内訳は以下の通り(2，3 の後が f_k のみの式で表せる)。



以上より　$f_{n+2}=2f_{n+1}+f_n$

生徒たちは慣れてきた様子だが，今度は(7)，(8)で悩んでいた。以下では，(7)を解説する。

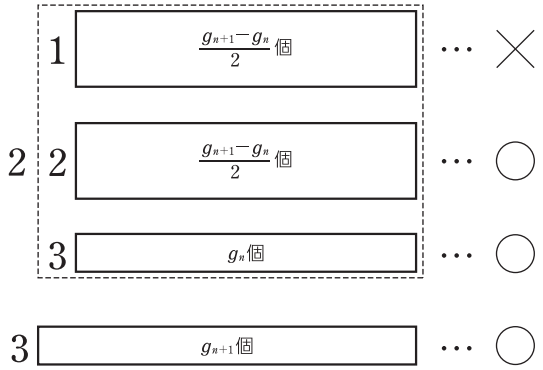
g_{n+2} 個の内訳は以下の通り(3 の後が g_k のみの式で表せる)。



1 から始まる自然数について，点線部分の自然数は g_{n+1} 個であるが，**【方針1】**，**【方針2】**だけでは「制限下にある1□，2□の個数が表せない」ため詰まったのだ。そこで，**【方針3】対称性の利用**である。

[12] と [21] がともに含まれないという条件ゆえ，

1□，2□の個数は同数で，$\frac{g_{n+1}-g_n}{2}$ 個と表せる。



2 から始まる自然数の個数も対称性より同数ゆえ

$$g_{n+2}=2\left(\frac{g_{n+1}-g_n}{2}+g_n\right)+g_{n+1}$$

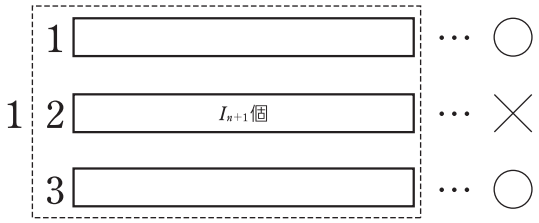
$$g_{n+2}=2g_{n+1}+g_n$$

(8)も同様にして，**【方針 3】対称性の利用**により

$$h_{n+2}=2h_{n+1}+h_n$$

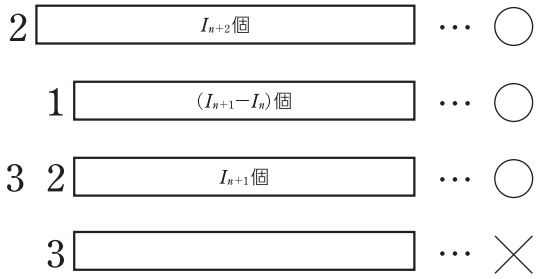
が成り立つ。数え上げる方針は異なるが，(6)，(7)，(8)ともに，同様の漸化式となるのが非常に興味深い。ここまで学んできた生徒たちは，(9)の 4 項間漸化式も難なく立式していた。以下では，(9)を解説する。

I_{n+3} 個の内訳は以下の通り (2 の後が I_k のみの式で表せる)。



上図は**【方針 2】**により，$(I_{n+2}-I_{n+1})$ 個である。

……(＊)



2 から始まる自然数は I_{n+2} 個ある。

上図の 3 から始まる自然数のうち，1□の個数の数え上げで重宝するのが，**【方針 4】前述の結果の利用**である。

1□の個数は，(＊)より，$(I_{n+2}-I_{n+1})$ 個の各 index を 1 つずつ下げた $(I_{n+1}-I_n)$ 個に他ならない。

以上より

$$I_{n+3}=(I_{n+2}-I_{n+1})+I_{n+2}+(I_{n+1}-I_n)+I_{n+1}$$

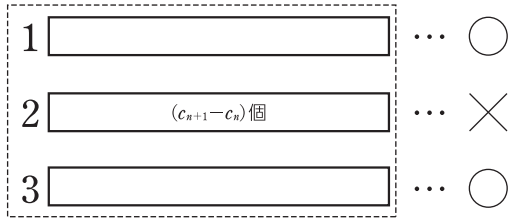
$$I_{n+3}=2I_{n+2}+I_{n+1}-I_n$$

(9)は**【方針 4】**を駆使し，最後は**【方針 1】**により立式する。

§5. 生徒たちの成長

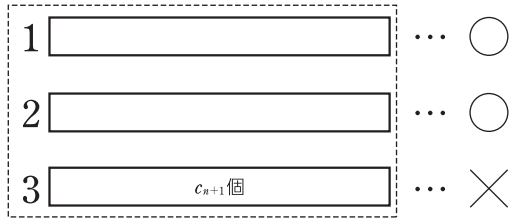
(4)〜(9)を経験した生徒たちは，とうとう(3)を一切悩まず立式してみせた。これは文系生徒理系生徒問わずである。

c_{n+3} 個の内訳は以下の通り (3 の後が c_k のみの式で表せる)。

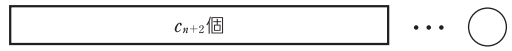


上図は**【方針 2】**，**【方針 4】**により，

$\{c_{n+2}-(c_{n+1}-c_n)\}$ 個である。



上図は**【方針 2】**により，$(c_{n+2}-c_{n+1})$ 個である。



3 から始まる自然数は c_{n+2} 個ある。

以上より

$$c_{n+3}=\{c_{n+2}-(c_{n+1}-c_n)\}+(c_{n+2}-c_{n+1})+c_{n+2}$$

$$c_{n+3}=3c_{n+2}-2c_{n+1}+c_n$$

(3)は，**【方針 2】**，**【方針 4】**を駆使し，最後は**【方針 1】**により立式する。全体を通して，(1)，(4)〜(9)，(3)の順に難易度を徐々に上げているのがわかると思う。

§6. おわりに

読者の皆様，ご一読ありがとうございました。

今回扱った**【方針 1】〜【方針 4】**は「場合の数漸化式」の立式に限ったものではなく，数学的思考の根本にあるものだと思います。私個人としては，安易なパターン化を極力避け，生徒たちには全単元を通じて，受験後も生かせる思考力を身につけてほしいと考えております。今回，彼らの成長に加え，「数式を楽しそうに記述する姿」が印象的でした。

(青森県立青森高等学校)