余弦と正弦の半角のなす数列

木村（きむら）　嘉宏（よしひろ）

§1. はじめに

三角関数の加法定理は，2 倍角の公式につながり多用される。それに対して，そこから派生する半角の公式は利用されることが少ないように思う。

そこで，教科書の系統から離れ，図を使って余弦の半角に関して考察を進めてみた。

その中で現れた，興味深い数列を本稿で紹介したいと思う。

§2. 半角の余弦

$\angle BCA=\dfrac{\pi}{2}$ である $\triangle ABC$ について，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，$\angle CAB=A$ とすると

$$\cos A=\frac{b}{c},\quad a^2+b^2=c^2$$

$\angle CAB$ の二等分線と辺 BC の交点を D とすると，$CD:DB=b:c$ であるから

$$CD:CB=b:(b+c)$$

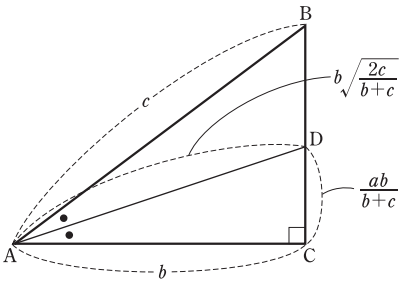
よって　$CD=CB\times\dfrac{b}{b+c}=\dfrac{ab}{b+c}$

直角三角形 ADC について，三平方の定理により

$$\begin{aligned}AD^2&=AC^2+CD^2=b^2+\left(\frac{ab}{b+c}\right)^2\\&=b^2\left\{1+\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right\}=b^2\left\{\frac{(b+c)^2+a^2}{(b+c)^2}\right\}\\&=b^2\left\{\frac{b^2+2bc+c^2+a^2}{(b+c)^2}\right\}=\frac{b^2(2bc+2c^2)}{(b+c)^2}\\&=\frac{2b^2c(b+c)}{(b+c)^2}=\frac{2b^2c}{b+c}\end{aligned}$$

$AD>0$ であるから　$AD=b\sqrt{\dfrac{2c}{b+c}}$

よって　$\cos\dfrac{A}{2}=\dfrac{AC}{AD}=\sqrt{\dfrac{b+c}{2c}}$



$c=2$ のとき　$\cos\dfrac{A}{2}=\dfrac{\sqrt{2+b}}{2}$，$\cos A=\dfrac{b}{2}$

したがって

$$\cos\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{2+2\cos A}}{2}\qquad\cdots\cdots(※)$$

である。

§3. $\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{\pi}{8}$，$\dfrac{\pi}{16}$ の余弦

$\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ であるから，(※) により

$$\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{4}}}{2}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{16}=\frac{\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{8}}}{2}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$$

§4. $\frac{\pi}{2^{n+1}}$ の余弦

$c_n=\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ とおくと

$$c_1=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad c_2=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$c_3=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$$

さらに，(※)により

$$c_4=\frac{\sqrt{2+2c_3}}{2}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}$$

一般に，$\boldsymbol{c_{n+1}=\frac{\sqrt{2+2c_n}}{2}}$ が成り立つ。

したがって，数列 $\{c_n\}$ について

$$\boldsymbol{c_1=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad c_{n+1}=\frac{\sqrt{2+2c_n}}{2}}\ (n=1,\ 2,\ 3\cdots\cdots)$$

なお，$n=0$ として，$c_0=\cos\frac{\pi}{2}=0$ を加えても数列 $\{c_n\}$ の隣接 2 項間の関係は保たれる。

また，$\lim_{\theta\to 0}\cos\theta=1$ より $\lim_{n\to\infty}c_n=1$ である。

§5. $\frac{\pi}{2^{n+1}}$ の正弦

$s_n=\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$ $(n=1,\ 2,\ 3\cdots\cdots)$ とおくと

$s_n^2+c_n^2=1$，$s_n>0$ より $s_n=\sqrt{1-c_n^2}$ であるから

$$s_1=\sqrt{1-c_1^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$s_{n+1}=\sqrt{1-c_{n+1}^2}=\sqrt{1-\frac{2+2c_n}{4}}=\frac{\sqrt{2-2c_n}}{2}$$

したがって

$$s_2=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$s_3=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$$

$$s_4=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}$$

である。

（京都府立丹後緑風高等学校）