三角形を解く順番

渋谷（しぶや）　勤（つとむ）

§1. はじめに

数学Ⅰの「三角形への応用」で扱われる主な定理は，正弦定理と余弦定理です。しかし，多くの生徒は「どちらの定理を使うのか」悩むそうです。よく考えて適切な選択ができるようになってほしいものです。まずは，次の参考文献〔1〕の**【例題】**(改題)を考えてみましょう。

§2. 問題

【例題】（参考文献〔1〕$p.159$ 例題13　改）
△ABC において，$b=\sqrt{3}+1$，$c=2$，$A=60^\circ$ のとき，a，B，C を求めよ。

補助線を一本引けば解けますが，正弦定理，余弦定理を使って解いてみましょう。

【解？】　余弦定理により

$$\begin{aligned}a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A\\&=(\sqrt{3}+1)^2+2^2-2(\sqrt{3}+1)\cdot 2\cos 60^\circ\\&=6\end{aligned}$$

$a>0$ であるから　　$a=\sqrt{6}$

余弦定理により

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{2^2+(\sqrt{6})^2-(\sqrt{3}+1)^2}{2\cdot 2\cdot\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

この後，生徒はどうするのでしょうか。この $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ から，$B=75^\circ$ を求められる生徒は限られます。**生徒は計算間違いと思い，計算し直し，テストでは時間が過ぎ，焦りだす。**計算は間違っていないが，多くの生徒は，このやり方では解けません。数学が得意な生徒は，同じく余弦定理から

$\cos C=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を求め，$C=45^\circ$，

$B=180^\circ-(60^\circ+45^\circ)=75^\circ$ と正解します。

あるいは，a の値を求めた後なので，破線で囲まれた部分を計算せず，正弦定理から $\sin C=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を求めます。$C=45^\circ$ または $C=135^\circ$ ですが，$A=60^\circ$ より $C=45^\circ$ となります。

ところが，同じく正弦定理から $\sin B=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

を求めると，前述太文字状態となります。テストで得点が得られるかどうかは「運」でしょうか？

そんなことはありません。参考文献〔1〕$p.158$ には

「**三角形の2辺の大小関係は，その向かい合う角の大小関係と一致する。**」　……Ⓐ

と書かれています。正弦定理の式をじっくり見てください。

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\qquad\cdots\cdots(*)$$

Ⓐと似たような事が成り立ちそうです。

【結論】出題される問題では，a，b，c の長さの値の難易(易しい値であるか，複雑な値であるか)は，A, B, C の角度の難易と一致する(ことが多い)。

(ことが多い)と加えたのは，正三角形や二等辺三角形，直角三角形などにはあてはまらないからです。この問題では，c と A(つまり $\sin A$)が易しい値，b が複雑な値です。(*)より，もし，a が易しい値であれば，左辺の分数は易しい値となります。すなわち，中辺，右辺も易しい値となります。このとき，右辺については，c が易しい値なので，分母の $\sin C$ も易しい値(つまり C が有名角)となります。中辺分母の $\sin B$ が易しい値(つまり B が有名角)のときは，b が複雑な値なので，中辺だけが複雑な値となってしまいます。よって，$\sin B$ は複雑な値(つまり B は有名角でない)となります。以上から「B は最後に求める角度」，「C は有名角」と考えるのが無難であると思います。

もし，a が複雑な値であれば，左辺の分数は複雑な値となります。すなわち，中辺，右辺も複雑な値となります。右辺については，c が易しい値なので，分母の $\sin C$ は複雑な値(つまり C は有名角でない)となります。中辺分母の $\sin B$ は，**複雑な値の場合**と**易しい値の場合**の両方が考えられます。前者の場合，B は有名角ではありません。つまり，△ABC で有名角は A のみとなり，有名角でない B，C の値を $\sin B$，$\sin C$，$\cos B$，$\cos C$ などから求めるので，出題困難となります。また，後者の場合，A，B が有名角となるが，(＊)の各辺の値は複雑な値であるから，a，b，R(外接円の半径)が複雑な値となります。三角形の 2 辺が複雑な値のときは計算が大変になり，出題は多く見られません。もちろん例外はありますが，出題には適しません。

§3. 終わりに

教員には小さなことでも，試行錯誤しながら解く生徒にとっては深刻な疑問点かもしれません。生徒が考え抜いた末，数学嫌いになってしまうのは避けたいものです。

《参考文献》

〔1〕 「数学Ⅰ」数研出版(2022)

(千葉県　日本大学習志野高等学校)