特別な 4 次方程式の解～複 2 次式をつくる～

横山（よこやま）　政道（まさみち）

§1. はじめに

今回，複 2 次式に変形できる 4 次方程式に絞って考えてみた。以前，4 次関数のグラフの平行移動の式変形をしているときに，複 2 次式への変形が思い浮かんだのがきっかけである。いろいろな視点で生徒たちに 4 次方程式の解を考えさせることで，さらに理解が深まるのではないかと思い，本稿を書いてみた。

§2. 関数の平行移動

以後，$a \neq 0$ とする。

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは $y=ax^2$ のグラフを x 軸方向へ $-\dfrac{b}{2a}$ 平行移動したもの，3 次関数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ のグラフは $y=ax^3-\dfrac{b^2-3ac}{3a}x$ のグラフを x 軸方向へ $-\dfrac{b}{3a}$ 平行移動したもの，それでは，4 次関数

$$y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e \qquad \cdots\cdots①$$

について，どのようになるか気になった。

3 次の項が消去するような変形を行ってみると

$$\begin{aligned} y&=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e \\ &=a\left(x+\frac{b}{4a}\right)^4-\frac{3b^2-8ac}{8a}\left(x+\frac{b}{4a}\right)^2 \\ &\quad+\left\{d+\frac{b(b^2-4ac)}{8a^2}\right\}\left(x+\frac{b}{4a}\right)+(\text{定数}) \end{aligned}$$

の形で表せる。つまり，$-\dfrac{3b^2-8ac}{8a}=p$，$d+\dfrac{b(b^2-4ac)}{8a^2}=q$ とすると，4 次関数①は $y=ax^4+px^2+qx$ のグラフを x 軸方向に $-\dfrac{b}{4a}$，y 軸方向に（定数）分だけ平行移動したものであることがわかる。

§3. 特別な 4 次方程式の解への応用

ここで，$x+\dfrac{b}{4a}$ の 1 次の項の係数にあたる $d+\dfrac{b(b^2-4ac)}{8a^2}$ が 0 になる，つまり $d=-\dfrac{b(b^2-4ac)}{8a^2}$ が成り立つときの 4 次方程式を考える。

この場合，4 次方程式は

$$\begin{aligned} &ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0 \iff \\ &a\left(x+\frac{b}{4a}\right)^4-\frac{3b^2-8ac}{8a}\left(x+\frac{b}{4a}\right)^2+(\text{定数})=0 \end{aligned}$$

$aX^4+pX^2+(\text{定数})=0$ の形となり，複 2 次式の 4 次方程式に帰着できる。（※整数係数）

【例題 1】 次の 4 次方程式

$$x^4+8x^3+5x^2-44x-42=0$$

の解について考える。

$x+\dfrac{b}{4a}=x+\dfrac{8}{4\cdot1}$ より $x+2=t$ とすると，与式は

$$\begin{aligned} &(t-2)^4+8(t-2)^3+5(t-2)^2-44(t-2)-42=0 \\ &t^4-19t^2+18=0 \\ &(t^2-1)(t^2-18)=0 \\ &t=\pm1,\ \pm3\sqrt{2} \end{aligned}$$

よって　$x=-3,\ -1,\ -2\pm3\sqrt{2}$

もちろん

$$d=-\frac{b(b^2-4ac)}{8a^2}\ (a=1,\ b=8,\ c=5,\ d=-44)$$

が成り立つように，問題は作成されている。

【例題 2】 次の 4 次方程式

$$x^4-8x^3+6x^2+40x+e=0$$

の解について考える。

$x-2=t$ とすると

$$\begin{aligned} &(t+2)^4-8(t+2)^3+6(t+2)^2+40(t+2)+e=0 \\ &t^4-18t^2+56+e=0 \qquad \cdots\cdots② \end{aligned}$$

例えば

(1) $e=-56$ のとき，②は

$t^2(t^2-18)=0$

$t^2=0,\ 18$

$t=0,\ \pm 3\sqrt{2}$

したがって　$x=2,\ 2\pm 3\sqrt{2}$　(2 重解の整数解と無理数解 2 個)

(2) $e=25$ のとき，②は

$t^4-18t^2+81=0$

$(t^2-9)^2=0$

よって　$t=\pm 3$

したがって　$x=-1,\ 5$　(ともに 2 重解の整数解)

(3) $e=0$ のとき，②は

$t^4-18t^2+56=0$

$(t^2-4)(t^2-14)=0$

よって　$t=\pm 2,\ \pm\sqrt{14}$

したがって　$x=0,\ 4,\ 2\pm\sqrt{14}$　(整数解 2 個と無理数解 2 個)

(4) $e=16$ のとき，②は 4 個の無理数解をもつ。

実際に計算すると，②は

$t^4-18t^2+72=0$

$(t^2-6)(t^2-12)=0$

よって　$t=\pm\sqrt{6},\ \pm 2\sqrt{3}$

したがって　$x=2\pm\sqrt{6},\ 2\pm 2\sqrt{3}$

(5) $e=-231$ のとき，②は 2 個の整数解と異なる虚数解 2 個をもつ。

実際に計算すると，②は

$t^4-18t^2-175=0$

$(t^2-25)(t^2+7)=0$

よって　$t=\pm 5,\ \pm\sqrt{7}\,i$

したがって　$x=-3,\ 7,\ 2\pm\sqrt{7}\,i$

※与式の異なる実数解の個数は，定数 e のとる値によって調べると

$e>25$ のとき 0 個

$e=25$ のとき重解が 2 個

$-56<e<25$ のとき 4 個

$e=-56$ のとき 3 個(重解 1 個含む)

$e<-56$ のとき 2 個

となる。

§4. 実際の解答

【例題 1】　$x^4+8x^3+5x^2-44x-42=0$

定数項の約数 -1 を代入すると

$1-8+5+44-42=0$

よって　$(x+1)(x^3+7x^2-2x-42)=0$

ゆえに　$(x+1)(x+3)(x^2+4x-14)=0$

したがって　$x=-3,\ -1,\ -2\pm 3\sqrt{2}$

【例題 1】は因数定理を用いて解を求めることは可能であるが，**【例題 2】**の $e=16$ のときの

$x^4-8x^3+6x^2+40x+16=0$ はどうだろうか。

高次方程式については，因数定理を使って解ける問題が問題集などには多く収録されているので，**【例題 2】**を難問と考える生徒も出てくると思う。しかし，因数定理の解法にとどまらず 1 つの問題をいろいろな視点で考えることで，与式が

(2 次式)×(2 次式)の積の形になることに気づけば，正解率は上がると思う。

【解答】

$x^4-8x^3+6x^2+40x+16=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$ を満たす整数 a，b，c，d が存在するかどうか調べる(仮定する)。

右辺$=x^4+(a+c)x^3$

$+(b+d+ac)x^2+(ad+bc)x+bd$

係数を比べて

$a+c=-8,\ b+d+ac=6,\ ad+bc=40,$

$bd=16$

係数は整数であることを考慮して

$a=c=-4,\ b=-2,\ d=-8$

与式は　$(x^2-4x-2)(x^2-4x-8)=0$

これを解いて　$x=2\pm\sqrt{6},\ 2\pm 2\sqrt{3}$

§5. おわりに

4 次方程式の特別なものには相反方程式など他にもあると思うが，解法を教えるだけでなく，生徒自らが問題を作成し，それを検証・分析までできるようになったら，さらに力は育っていくのだろうと思い，引き続き教材研究を続けていきたい。

(宮崎県立佐土原高等学校)