2 次方程式の解の配置問題についての考察

北川（きたがわ）　昭彦（あきひこ）

§1. はじめに

2 次方程式の解の配置問題は「直線の通過領域」につながるため，非常に重要です。しかし，場合分けをする必要があるため，受験生にとっては完答することが難しい問題でもあるようです。

§2. 問題演習

3 学期に，本校の授業で以下の問題を扱いました。

【問題 1】
2 次方程式 $x^2-2mx-m+6=0$ が，$0 \leqq x \leqq 3$ の範囲に実数解をもつような定数m の値の範囲を求めよ。

2 次関数 $y=x^2-2mx-m+6$ のグラフと x 軸の $0 \leqq x \leqq 3$ の部分の共有点の個数に帰着させて考えることを全員で振り返った後，生徒に**【問題 1】**を解いてもらいました。主に

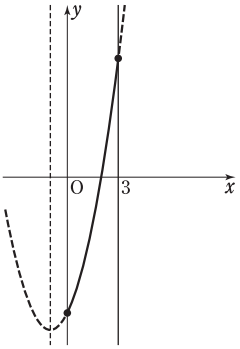
・共有点が 1 個の場合と 2 個の場合で場合分けをする。
・共有点が 0 個となる定数m の値の範囲を考え，その補集合を考える。

といった発想の生徒が多かったように感じます。授業の最後に，別解として「軸の位置による場合分けを用いた解答」を次のように生徒に紹介しました。

【別解】

$f(x)=x^2-2mx-m+6$ とし，2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とおく。

(i) $\boldsymbol{m \leqq 0}$ **のとき**



$$\begin{cases} f(0) \leqq 0 \\ f(3) \geqq 0 \end{cases}$$

を満たす定数m の値の範囲を求めればよい。

$f(0) \leqq 0$ より　$-m+6 \leqq 0$

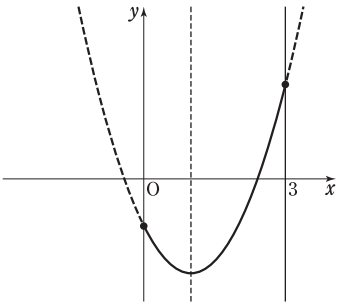
$6 \leqq m$

$f(3) \geqq 0$ より　$-7m+15 \geqq 0$

$m \leqq \dfrac{15}{7}$

これらを満たすm は存在しない。

(ii) $\boldsymbol{0<m<3}$ **のとき**



$$\begin{cases} \text{判別式 } D \geqq 0 \quad \text{つまり} \quad m^2+m-6 \geqq 0 & \cdots\cdots① \\ f(0) \geqq 0 \quad \text{または} \quad f(3) \geqq 0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

を同時に満たすm の値の範囲を求めればよい。

①より　$(m+3)(m-2)\geqq 0$

$m\leqq -3,\ 2\leqq m$　……①′

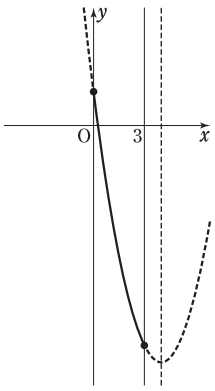
②より　$-m+6\geqq 0$　または　$-7m+15\geqq 0$

$m\leqq 6$　または　$m\leqq \dfrac{15}{7}$

$m\leqq 6$　……②′

①′，②′ と $0<m<3$ より　$2\leqq m<3$

(iii)　$3\leqq m$ のとき



$\begin{cases} f(0)\geqq 0 \\ f(3)\leqq 0 \end{cases}$

を満たす定数mの値の範囲を求めればよい。

$f(0)\geqq 0$ より　$-m+6\geqq 0$

$m\leqq 6$

$f(3)\leqq 0$ より　$-7m+15\leqq 0$

$\dfrac{15}{7}\leqq m$

これらより　$\dfrac{15}{7}\leqq m\leqq 6$

$3\leqq m$ より　$3\leqq m\leqq 6$

(i)〜(iii)より，求めるmの値の範囲は　$2\leqq m\leqq 6$

軸の位置による場合分けは2次関数の最大値・最小値問題で扱いますので，生徒の理解度は高かったと思います。

ただし，この解答は場合分けにおける等号のつけ方が一般的なものと異なります。例えば，参考文献〔1〕には，次のような問題が掲載されています。

【問題2】（参考文献〔1〕$p.107$ 補充問題5）
a は定数とする。関数 $y=x^2-2ax+a^2+1$ $(0\leqq x\leqq 2)$ の最小値を，次の場合について，それぞれ求めよ。
(1)　$a<0$　(2)　$0\leqq a\leqq 2$　(3)　$2<a$

この問題の解説をするとき，私はあえて
(1)′　$a\leqq 0$　(2)′　$0<a<2$　(3)′　$2\leqq a$
と場合分けをして授業を行いました。
理由は $0\leqq x\leqq 2$ において
(1)′，(3)′ の場合，$y=f(x)$ は常に増加または常に減少する関数
(2)′ の場合，$y=f(x)$ は増加も減少もする関数
となるからです。**【問題2】**のような最大値・最小値を求める問題や**【問題1】**のようにxの範囲の端点に等号がついている解の配置問題であれば先述の場合分けで全く問題ないのですが，次の**【問題3】**の場合，不都合が生じます。

【問題3】
2次方程式 $x^2-2mx-m+6=0$ が，$0<x<3$ の範囲に実数解をもつような定数mの値の範囲を求めよ。

【解答】
$f(x)=x^2-2mx-m+6$ とし，2次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とおく。

(i)　$m<0$ のとき

$\begin{cases} f(0)<0 \\ f(3)>0 \end{cases}$

を満たす定数mの値の範囲を求めればよい。

$f(0)<0$ より　$6<m$

$f(3)>0$ より　$m<\dfrac{15}{7}$

これらを満たすmは存在しない。

(ii)　$0\leqq m\leqq 3$ のとき

$\begin{cases} \text{判別式 } D\geqq 0 \quad \text{つまり} \quad m^2+m-6\geqq 0 & \cdots\cdots① \\ f(0)>0 \quad \text{または} \quad f(3)>0 & \cdots\cdots② \end{cases}$

を同時に満たすmの値の範囲を求めればよい。

①より　$(m+3)(m-2)\geqq 0$

$m\leqq -3,\ 2\leqq m$　……①′

②より　$-m+6>0$　または　$-7m+15>0$

$m<6$　……②′

①′，②′ と $0\leqq m\leqq 3$ より　$2\leqq m\leqq 3$

(iii)　$3<m$ のとき

$\begin{cases} f(0)>0 \\ f(3)<0 \end{cases}$

を満たす定数mの値の範囲を求めればよい。

$f(0)>0$ より　　$m<6$

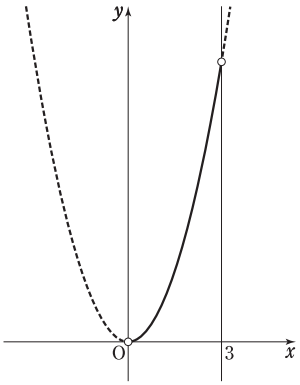
$f(3)<0$ より　　$\dfrac{15}{7}<m$

これらより　　$\dfrac{15}{7}<m<6$

$3<m$ より　　$3<m<6$

(i)〜(iii)より，求めるmの値の範囲は　　$2\leqq m<6$

先述の解答の場合，(ii)において原点や点(3, 0)で$y=f(x)$のグラフがx軸と接する場合も考えることになってしまい，「余計なmの値まで求めることになってしまうのではないか」という疑念が残ります。



この原因は $m=0$, 3 の場合は $y=f(x)$ が $0<x<3$ において単調に増加または単調に減少するのに対して，$0<m<3$ の場合は $y=f(x)$ が $0<x<3$ において増加も減少もする。この違いがあるのに(ii)においてひとまとめにして解答を作っていることです。そのため，**【問題3】**においても

[1]　$0<m<3$ のとき

[2]　$m\leqq 0$ または $3\leqq m$ のとき

で場合分けする方がよいのではないかと考えています。

【解答】

$f(x)=x^2-2mx-m+6$ とし，2次方程式

$f(x)=0$ の判別式をDとおく。

(i)　**$m\leqq 0$ のとき**

$$\begin{cases} f(0)<0 \\ f(3)>0 \end{cases}$$

を満たす定数mの値の範囲を求めればよい。

$f(0)<0$ より　　$6<m$

$f(3)>0$ より　　$m<\dfrac{15}{7}$

これらを満たすmは存在しない。

(ii)　**$0<m<3$ のとき**

$$\begin{cases} \text{判別式 } D\geqq 0 \quad \text{つまり} \quad m^2+m-6\geqq 0 & \cdots\cdots① \\ f(0)>0 \quad \text{または} \quad f(3)>0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

を同時に満たすmの値の範囲を求めればよい。

①より　　$(m+3)(m-2)\geqq 0$

$m\leqq -3,\ 2\leqq m$　　……①′

②より　　$-m+6>0$　または　$-7m+15>0$

$m<6$　　……②′

①′, ②′ と $0<m<3$ より　　$2\leqq m<3$

(iii)　**$3\leqq m$ のとき**

$$\begin{cases} f(0)>0 \\ f(3)<0 \end{cases}$$

を満たす定数mの値の範囲を求めればよい。

$f(0)>0$ より　　$m<6$

$f(3)<0$ より　　$\dfrac{15}{7}<m$

これらより　　$\dfrac{15}{7}<m<6$

$3\leqq m$ より　　$3\leqq m<6$

(i)〜(iii)より，求めるmの値の範囲は　　$2\leqq m<6$

補足

どちらの解答も答えは変わりません。これは「この関数のグラフが原点や点(3, 0)でx軸と接することはない」ことを示しています。

§3. 最後に

参考文献〔2〕$p.21$ Challenge 99番で**【問題3】**と同様の問題が収録されています。グラフが端点を通るときを別に考える解答が掲載されています。よかったらご覧ください。

《参考文献》

〔1〕「新編 数学Ⅰ」数研出版(2022)

〔2〕「改訂版　キートレーニング数学演習Ⅰ・Ⅱ・A・B・C〔ベクトル〕受験編」数研出版(2025)

(長崎県立大村高等学校)