# ルールとして見る「お金」：数列・確率・微分積分の接続

松江（まつえ）　要（かなめ）

## §1. 始めに：数学とお金

本稿では，私たちの生活に欠かせない「お金」を題材に，高校数学からより発展的な数理への接続を試みます。

## §2. 貯める

まず，お金の計算と高校数学で習う概念との接続を試みます。お金で何かを買いたい場合は，まず貯める。お金を手元に持たないことには，何も始まりません。お小遣い，お給料などで「毎年」一定の額(収入) $S$ が手元に来る事を想定すると，典型的な貯蓄方法はいくつかあり，お金を増やす手段という意味で，いずれも**資産運用**と位置づけられます。

- **家に置く**。
- **銀行に預ける**。
- **投資信託**，**積み立て**などに回す。

まず，お金を家に置く場合は，一定額が増えていくだけですので，前年に対して $S$ だけ増えます。

$$a_n = a_{n-1} + S \qquad \cdots\cdots (1)$$

一方，銀行に預けたとき，通帳や銀行アプリを覗くと，年数回利息がつくことを確認できます。これは，貯蓄額に対して一定の割合で加算されるもので，年1回の場合関係式は次のようになります。

$$a_n = (1+r)(a_{n-1} + S) \qquad \cdots\cdots (2)$$

前年までの貯蓄額 $a_{n-1}$，毎年預ける $S$ の両方に対して利息がつくことに注意します。

おのおの，一般項 $a_n$ は $n$ 年後の合計額に対応します。(1)は**等差数列**，(2)は($S=0$ の場合) **等比数列**として数列の授業で扱うものですが，金融の文脈ではそれぞれ**単利**，**複利**のルールとして扱います。お金の扱いでは，複利をうまく扱えるかが非常に重要になってきます。事実，実際の数値を当てはめるとその凄まじさが際立ちます。表1では，毎月1,000円のお小遣いをもらい，(A)：家に置く，(B)：年始に「1年のお小遣いの50％相当のお年玉を追加でもらう」，(C)：毎月のお小遣いをすべて投資信託(平均利子5％)に回す，の3パターンの運用を考え，一定の年数が経った時の残高を表しています。これらは，(1)，(2)の一般項により求められます。

この結果のポイントは，運用を**長期間**実施することの重要さです。特に，利子率が高くなくても，時間の経過(＋継続的投資)と複利が額の増加を支配することを物語っています。時折 **“若いうちから資産運用に関心を持て”** という声を聞きますが，それはこの複利効果の凄まじさ，あとは我々の時間が有限であることを反映していると考えれば，合点がいくところがあります。我々はこの事実を，感覚でなく**変化のルール**という**構造**として理解できます。ルールがわかれば，**数列**の一般論の話になります。

| 運用 | (A) | (B) | (C) |
|---|---|---|---|
| 開始当初 | 0 | 0 | 0 |
| 10年 | 120,000 | 180,000 | 158,481 |
| 20年 | 240,000 | 360,000 | 416,631 |
| 30年 | 360,000 | 540,000 | 837,129 |

**表1. 複利の効果は凄まじい**

## §3. 自己投資

前節では，複利によるお金の増え方の重要性を説明しました。これを使って，「お金の価値」の考え方を簡単に紹介します。今，100 円が手元にあります。これを「**今もらうか，1 年後にもらうか，どちらか選べ**」と言われたら，あなたはどちらを選択しますか？

前節で述べたように，我々は銀行などにお金を預けることによって，**利子**をつけてお金を増やすことができます。ここでは，銀行などに預けて運用することで，年 2% の利子がつくと仮定します。すると，今年もらう 100 円は，1 年後には 102 円の価値になります。一方，1 年後にもらう 100 円は，2% の利子がついて初めて 100 円の価値が生まれ，今は $\frac{100}{1.02}\approx 98$ 円の価値しかないことが従います。これは**タイムバリュー**と呼び，額面では同じでもお金の価値が異なることを表す指標になります。金融や投資の世界では，**現在の価値に置き直す**と表現します。複雑そうに見えますが，タイムバリューそのものの関係式は上の性質からただちに求められます。銀行などでつく利子率を $r$ としたとき，1 年後に割り引いた現在価値の関係は

$$a_n=\frac{a_{n-1}}{1+r} \qquad \cdots\cdots(3)$$

で表されます。(2)にて，$S=0$ とした場合の逆バージョンと考えればよいでしょう。これを用いると，今や将来のお金を，見かけの数字に惑わされず，利子などを考慮した実際の価値として測ることができます。例えば，先の例では，今年もらう 100 円は 10 年後には 122 円の価値になりますが，10 年後にもらう 100 円は現在の 82 円の価値しかありません。

これを用いて，**お金を伴う意思決定**の考え方を垣間見ることができます。

> **【問題】**（参考文献〔2〕Chapter 3 参照）
> 現在，年間 100 万円の収入があるとします。さて，「今受けるとこれから 1 年間ずつ，計 5 年間，その時点の売り上げ能力から 10% 稼ぎを増やせる技術が学べる」という勉強会のお誘いを受けました。参加費は 120 万円です。この勉強会，受けますか？

ここでは，合計の売上額をベースに，損得を評価基準として考えることにします。**収入が増えるのは今後**です。一方，**勉強会の参加費を支払うのは今**です。一見すると，勉強会に行くことで 1 年目の稼ぎがすべて無くなる（かつマイナスになる）ため，二の足を踏みそうですが，先で見たようお金の価値は年々変わるので，損得を正しく考えるには，**基準を揃える**ことが肝要です。そこで，タイムバリューの出番です。勉強会を受けない場合，$n$ 年度目の売上を $S$ とすると，そのタイムバリューは $\frac{S}{(1+r)^n}$ となります。よって，額面上では 5 年間で 500 万稼いでいるように見えますが，その現在価値は

$$S\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{1}{1+r}\right)^k \qquad \cdots\cdots(4)$$

しかありません。$r=0.02$ とすると，471 万円程度にしかなりません。複利により，お金の価値がどんどん下がることが反映されています。一方，勉強会を受ける場合，売上が “その時点から” 10% 増えるので，$s$ を売り上げの増大率として，$a_n$ は

$$a_n=\frac{1+s}{1+r}a_{n-1}$$

となります。よって，勉強会を受ける場合の売り上げは先と同様に，かつ勉強会に $T$ 円かかったとして，その残りが実際の**売り上げの現在価値**で

$$S\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{1+s}{1+r}\right)^k-T \qquad \cdots\cdots(5)$$

となります。勉強会は**今**受講するので，タイムバリューも変わっていない事に注意します。ここまで来ると，**【問題】**は(4)**と**(5)**のどちらが大きいか**に帰着されます。$S$，$T$，$r$，$s$ に具体的な値を当てはめて，数値を比べるだけです。今回の問題の場合，(4)は 471 万円，(5)では（勉強会のために最初に 120 万円払った後に！）**511 万円**になります。よって，(4)と比べて 40 万円近く増えるので，**勉強会を受ける方が得**という結論になります。

一方，(4)と(5)が等しくなるときの $T$ は**フェアバリュー**と呼ばれ，「勉強会のために，いくらまでなら支払ってよいか」という閾値を与え，意思決定の基準を与えます。今回の例でのフェアバリューは 1,593,508 円で，「勉強会がこれより安ければ，受けるべき」という判断ができます。このように，数列の応用により，「お金の伴う行動戦略」を考えることができるのです。もちろん，5 年働き続けて初め

て得するので，途中で放り投げないようにするのは前提です（本節は参考文献〔2〕Chapter 3 を基に再構成）。

## §4. 使う

次に，利子だけで生活のやりくりをする事を考えます。例として，240,000 円だけを利子 5% の投資信託で運用する事を考えます。翌年には 5% の利子がつき，12,000 円増えます。その後，1 年ごとに**一定額の出費**をすると仮定します。このとき，出費額が 12,000 円以下であれば，元本は少なくとも 240,000 円確保されるので，毎年 5% の利子として，12,000 円以上の利息が担保されます。結果，元本は 240,000 円を下回ることがなく，出費額の基準を守る限り，**お金は使っても永遠に無くならない**のです。この関係も，数列で簡単にわかります。

$$a_n=(1+r)a_{n-1}-T$$

$r$ は利回り，$T$ は一定出費額です。$a_n$ が増え続けるように $T$ を調整すればよいのです。

さて，これで話が済めば簡単なのですが……お金のやりくりは，そう甘くありません。最近，**物価高**が叫ばれています。5 年ほど前と比べると，最近の物価上昇の勢いは凄まじいです。特に，同じものも固定額では買えなくなり，「余分な出費」が増えていきます。後から振り返ると，「数年前と比べて凄まじい出費の増加」という構造になります。これを引き起こすものが**インフレ**です。例えば，初年度 10,000 円だったものを毎年買う事を考えると，年 3% のインフレがあると，1 年後に同じものを買うには 10,300 円，2 年後は 10,609 円と，物価がどんどん上がっていきます。これを考慮しないと何が起こるか？物価がインフレで上がる分，利子による増額分を打ち消してしまいます。これを漸化式で表すと，以下のようになります。

$$a_n=(1+r)a_{n-1}-T_n,$$
$$T_n=(1+s)T_{n-1}$$

ここで，$s$ はインフレ率を表します。インフレによる出費の上昇分を考慮した後（**インフレ調整**といいます），$a_n$ の増え方が緩やかになることが従います。「突然の出費」もインフレで価格が上昇している分，値上がりした額を支払う事になります。利回りが減る分，出費の影響も大きくなり，**利子による増加分が想定額（今回の例では 12,000 円）を下回る**ようになります。インフレの影響はその後も続くため，**最初からインフレの影響を考慮した上で，お金の運用や家計のやりくりをする必要がある**ことを，この結果は示唆しています。実際には**為替**，**経済情勢**なども同時に影響し，ルールはさらに複雑になります（参考文献〔1〕，〔3〕参照）。お金の動きは**数学と経済の繋がり**を垣間見れる事例であると言え，普段から経済などの知識を取り入れ続ける必要性を実感できます（本節は参考文献〔2〕Chapter 4 を基に再構成）。

| 年 | 利子（5%） | 定期出費 | 元本 |
|---|---|---|---|
| 0 | | | 240,000 |
| 1 | 12,000 | 10,300 | 241,700 |
| 2 | 12,085 | 10,609 | 243,176 |
| 3 | 12,159 | 16,391 | 238,944 |
| | | ⋮ | |
| 7 | 12,004 | 12,299 | 239,790 |

**表 2. 出費：インフレ（年 3%）で運用逆回転**
**3 年後に急な出費を想定。0 年目に 5,000 円だったものがインフレにより値上がり，3 年後には 5,464 円に。8 年後から利子は 12,000 円を下回るようになり，いずれ破産……。**

## §5. ローンの返済

次に，モノを購入するときのお金の動きを考えます。スマートフォンなどでも**分割払い**を利用して，月々の支払いを抑え，バランスよく払う仕組みがあるものもあります。大きな買い物，例えば，住宅（不動産）や車を購入する場合，一括払いは一般に現実的ではありません。一方で，支払い終わるまでに 20 年～30 年も売主は待ってくれません。そのため，大きな買い物の分割払いは**銀行からお金を借り**て，銀行が売主に一括払いし，**我々は銀行に分割払い**をします。その際，借入れ額 $S$ を**金利 $\alpha$% で返済する**という指定で，分割払いを行います。

さて，**支払い終えるとき，全部でいくら払うことになるのでしょう？**これを求めるには，返済の「ルール」を理解しておく必要があります。我々は通常，年 1 回でなく**月 1 回**支払います。これに基づき

ルール１　利子 $a$ は**年利**。分割する場合は，年ごとの支払い回数で利子も分割される。

例えば，月払いの場合は，利子が $\frac{a}{12}$ となります。

ルール２　**元利均等**，**元金均等**の２種類の支払い方法がある。

いま，我々は数式に落とし込む方法を知っていますので，上のルールを数式で表すと，見通しがよくなります。

・$S$：全借入れ額
・$a$：**月利**（いわゆる“利子”はこれの12倍）
・$n$：返済回数（＝年数×12）
・$x_i$，$y_i$：$i$ 月目の元金返済額，利息返済額
・$z_i$：$i$ 月目の返済額（$=x_i+y_i$）
・$\tilde{S}=\sum_{i=1}^{n} z_i$：実際の支払額

とします。利息 $y_i$ は常に残り元金に応じて決まります。

$$y_i := a\left(S-\sum_{j=1}^{i-1} x_j\right)$$

**元利均等**の場合は，$z_i$ が固定されます。その差額が，元金の返済額です。

$$z_i := \frac{Sa(1+a)^n}{(1+a)^n-1},\quad x_i := z_i - y_i$$

対して，**元金均等**の場合は $x_i$ が固定されます。

$$z_i := x_i + y_i,\quad x_i := \frac{S}{n}$$

言葉で書かれるとややこしそうなものでも，ここまで来るとあとは数列の領域です。合計支払額 $\tilde{S}$ も，$i$ 月目の実際の支払額も容易に計算できます。$\tilde{S}$ を計算すると，利子 $a$ が小さくても $n$ が大きければ，複利の効果により相当大きくなることが見てとれます。

**注意１**　月利や複利の考え方を取り入れた金融商品の一つに，保険があります。特に**生命保険**では，「いつまで生きるか」「いつ支払いが発生するか」といった将来の不確実性を扱うため，**確率・統計**の考え方が本質的な役割を果たします。例えば，将来の支払いを現在価値に割り引く操作は本稿で扱った数列の考え方そのものであり，さらに「どの時点で支払いが起こるか」を確率として評価することで，保険料の妥当性が判断されます。このように，生命保険の数理では，数列・確率・微分積分が密接に関係し，「お金」と「不確実な将来」を結びつける具体的な数学の応用が現れます。

## §6. 瞬間と蓄積

ここまでのお話を総合して，複利の漸化式

$$a_{n+1}=(1+r)a_n$$

を違う見方で見てみます。ここでは，$n$ を年数などと見立てて「時間」とみなすことができます。そこで，関数のように下の添え字を括弧で表し，$n$ を $t$ に変えてみます。

$$a(t+1)=(1+r)a(t) \quad \cdots\cdots(6)$$

ここで，$t$ が年を単位にもつとして，時間を「1ヶ月」だけ進めてみます。この時，不動産ローンのように利子は「月利」で考えます。すると，1ヶ月後の資産は

$$a\left(t+\frac{1}{12}\right)=\left(1+\frac{r}{12}\right)a(t)$$

となります。これを少し変形してみます。

$$\frac{a\left(t+\frac{1}{12}\right)-a(t)}{\frac{1}{12}}=ra(t)$$

これは，1ヶ月で利子がつく商品を扱うときの資産変化，あるいは支払額の変化を表していると言えます。さらに思い切って，利子が $\varDelta t$ ごとにつく場合を考えてみます。例えば，1日は $\varDelta t=\frac{1}{365}$，1時間は $\varDelta t=\frac{1}{8760}$ に対応します。月利と同じルールで，各単位ごとの利子は利子率 $r$ を等分します。

$$a(t+\varDelta t)=(1+r\varDelta t)a(t) \quad \cdots\cdots(7)$$

変形して

$$\frac{a(t+\varDelta t)-a(t)}{\varDelta t}=ra(t)$$

です。ここで，左辺が「数学Ⅱで習うあの形」になっていること，右辺の形が全く変わっていないことに着目します。もっと感覚を短く，「瞬間的に利子がついて，資産が変化する」事を考えると，以下の式を得ます。

$$\frac{d}{dt}a(t)=ra(t) \quad \cdots\cdots(8)$$

資産の変化が，**微分**で記述できることがわかりました。

次に，$t$ 年時点での総資産を計算してみます(簡単のため，$t$ は自然数とします)。これは漸化式の一般項 $a(t)$ に相当するもので，1年ごとに利子がつく(6)では

$$a(t)=a(0)(1+r)^t$$

同様の計算で，(7)は

$$a(t)=a(0)(1+r\Delta t)^{\frac{t}{\Delta t}} \quad \cdots\cdots (9)$$

となります。同じことを(8)に対して行うと，その蓄積は

$$a(t)=a(0)+\int_0^t ra(s)\,ds \quad \cdots\cdots (10)$$

これは**積分**に他ならず

$$a(t)=a(0)e^{rt} \quad \cdots\cdots (11)$$

となります。ここで，数列の**漸化式と微分**，**一般項と積分**の関係があらわになりました。$e$ はネイピア数と呼ばれる数で，(11)は**指数関数**そのものです。この関数の解説は数学Ⅲに譲りますが，図1を見ると，時間刻み幅について，$\Delta t=\dfrac{1}{12}$ の時点で，一般項(9)と積分(10)は見分けがつかなくなっています。

一定期間ごとに一定額の積み立てを行う

$$a_{n+1}=(1+r)a_n+S$$

も同様で，瞬間的な変化は

$$\frac{d}{dt}a(t)=ra(t)+S$$

その蓄積は次の積分値になります。

$$a(t)=a(0)e^{rt}+St$$

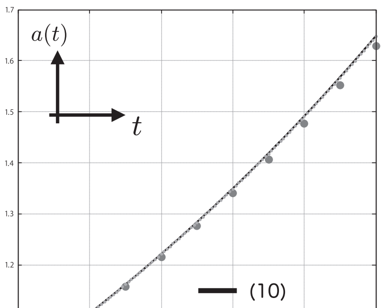


**図1．瞬間の変化と蓄積**

## §7．数理ファイナンスの入口

ここで，(8)に着目します。これは**資産の変化が瞬間的に起こる**場合の関係式でした。果たして，このような瞬間的な変化は起こるのだろうか？私たちはメディアでそのような金融商品を頻繁に目にしています。**株価**はその好例です。株価は株式(などの商品)を売っている企業の業績，社会のニュースや事件，国の景気，金利，外国為替，国際情勢，さらには「期待や不安」などの**投資家心理**により誘発される売買行動により，(秒レベルの)ごく短時間で変化します。投資家はこれらを読み，適切なタイミングで金融商品の売買を行いますが，世界中の人の「心理」を1人の人間が「制御」するのは不可能です。そのため，これらは**ランダムに変動する**と考え，ランダム変動する利子を導入します。

$$r=r_0+\sigma\xi,\ \xi\text{“}:=\text{”}\frac{d}{dt}B(t)$$

ここで $r_0$ は平均利子率，$\sigma$ は金融市場の不確実性の強さを表す量で，**ボラティリティ**(**変動性**)と呼ばれます。これにより(8)は

$$\frac{d}{dt}A(t)=(r_0+\sigma\xi)A(t) \quad \cdots\cdots (12)$$

となりますが，$\xi$ に使われる $B(t)$ は**ブラウン運動**と呼ばれるもので，すべての $t$ で微分不可能であるため，$\xi$ は明示的に使わず，(12)の代わりに数学的に正当な形式である

$$dA(t)=r_0A(t)dt+\sigma A(t)dB(t) \quad \cdots\cdots (13)$$

として書かれます。これは金融市場の**ブラック・ショールズモデル**と呼ばれ，**確率微分方程式**と呼ばれるものの一種です。ここから，お金の動きを「不確実性を含めて」数理的に記述する**数理ファイナンス**という分野が展開されます(参考文献〔4〕参照)。図2を見ると，動きの不確実性がよくわかります。

注意2　ブラウン運動が出てくるのは，不確実性の時間変化を記述するに足る**数学の要請に適うものがこれしかない**事実に由来しています。高校数学と繋がるところでは，(標準)ブラウン運動は**平均**0，時刻 $t$ における $B(t)-B(0)$ の**分散**が $t$ となり正規分布に従って振る舞う性質が顕著です。最後の主張は，「どのような不確実性も多く集めて平均との差を標準偏差で割って眺め直すと，正規分布に近づく」という**中心極限定理**として知られるもので，確率・統計の理論・実用の肝の1つとなる性質です。

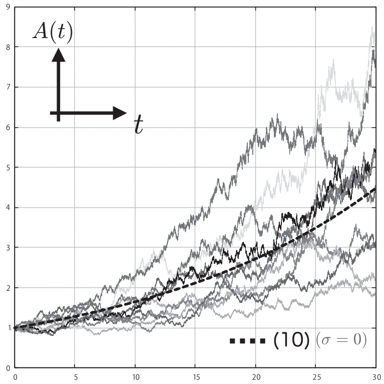


**図 2. ⒀の解**

以上のように，お金の動きは，高校数学で学ぶ数列や関数，確率や統計の考え方を用いて，感覚ではなく**ルール**として捉えることができます。この視点は，貯蓄や投資だけでなく，将来の不確実性を扱う保険を理解する際にも重要であり，数学と社会とのつながりを示す具体的な題材になります。

**《参考文献》**

〔1〕 チャールズ・エリス　著，鹿毛雄二・鹿毛房子　訳「敗者のゲーム」日本経済新聞出版(2022)

〔2〕 田中渓　著「億までの人 億からの人　ゴールドマン・サックス勤続17年の投資家が明かす「兆人」のマインド」徳間書店(2024)

〔3〕 伊藤亮太　監修「大図解 新NISA対応版 お金のしくみ見るだけノート」宝島社(2024)

〔4〕 成田清正　著「確率解析への誘い―確率微分方程式の基礎と応用」共立出版(2016)

(九州大学　マス・フォア・インダストリ研究所/カーボンニュートラル・エネルギー国際研究所　教授)