優勝するまでの試合数の期待値

あずま　よういちろう
東　洋一郎

§1．はじめに

プロ野球日本選手権シリーズ（日本シリーズ）は，先に4回勝ったチームが優勝する仕組みになっています。試合数の期待値はどれくらいだろうと，反復試行の確率を利用して求めてみました。その際，A，B 2チームが互角の力をもち$\left(\text{A も B も勝つ確率が } \frac{1}{2}\right)$，引き分けはないと条件を単純化したところ，試合数の期待値は $\frac{93}{16}=5.8125$ となります。

下の表は，プロ野球が好きな友人の話を基にまとめた，1950年から2024年まで行われた日本シリーズの結果です。（引き分けは除く。）

試合数 X	4	5	6	7	計
回数	9	18	26	22	75
計	36	90	156	154	436

1シリーズあたりの試合数の平均は5.8133…… となり，ほとんど前述の結果と同じになりました。このことから，日本シリーズで戦った2チームは，平均的に互角の力を持っていたと言えそうです。このことを一般化して，先に$(n+1)$勝した方が優勝すると設定し，そのときの試合数の期待値を求めてみました。

§2．優勝が決まるまでの試合数の期待値 $E(X)$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n}(n+k+1)\frac{{}_{n+k}C_k}{2^{n+k}} \qquad \cdots\cdots ①$$

①の説明

$(n+k+1)$ 試合目で A の優勝が決まるのは，「$(n+k)$ 試合目までにおいて A が n 勝 k 敗となり，$(n+k+1)$ 試合目で A が勝つ」場合です。B が優勝する場合も同じ確率なので2倍する必要があります。

よって，A，B 2チームとも1試合につき勝つ確率が $\frac{1}{2}$ のとき $(n+k+1)$ 試合目で優勝が決まる確率は

$$2\times{}_{n+k}C_k\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^k\times\left(\frac{1}{2}\right)$$

となります。

①より $E(X)=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_{n+k}C_k}{2^{n+k}}+\sum_{k=0}^{n}\left(k\times\frac{{}_{n+k}C_k}{2^{n+k}}\right)$

$$=(n+1)+\sum_{k=0}^{n}\left(k\times\frac{{}_{n+k}C_k}{2^{n+k}}\right)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_{n+k}C_k}{2^{n+k}}=1 \text{　より}\right)$$

ここで，$A=\sum_{k=0}^{n}\left(k\times\frac{{}_{n+k}C_k}{2^{n+k}}\right)$ とします。このとき

$A=\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+k)\,{}_{n+k-1}C_{k-1}}{2^{n+k}}$ （$r\,{}_nC_r=n\,{}_{n-1}C_{r-1}$ を利用）

よって　　$2A=n\sum_{k=1}^{n}\frac{{}_{n+k-1}C_{k-1}}{2^{n+k-1}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{k\,{}_{n+k-1}C_{k-1}}{2^{n+k-1}}$

ここで，$B=\sum_{k=1}^{n}\frac{{}_{n+k-1}C_{k-1}}{2^{n+k-1}}$，$C=\sum_{k=1}^{n}\frac{k\,{}_{n+k-1}C_{k-1}}{2^{n+k-1}}$ として，$l=k-1$（$k=l+1$）でおきかえます。

このとき

$$B=\sum_{l=0}^{n-1}\frac{{}_{n+l}C_l}{2^{n+l}}=\sum_{l=0}^{n}\frac{{}_{n+l}C_l}{2^{n+l}}-\frac{{}_{2n}C_n}{2^{2n}}=1-\frac{{}_{2n}C_n}{2^{2n}}$$

$$C=\sum_{l=0}^{n-1}\frac{(l+1)\,{}_{n+l}C_l}{2^{n+l}}$$

$$=\sum_{l=0}^{n}\frac{l\,{}_{n+l}C_l}{2^{n+l}}+\sum_{l=0}^{n}\frac{{}_{n+l}C_l}{2^{n+l}}-\frac{(n+1)\,{}_{2n}C_n}{2^{2n}}$$

$$=A+1-\frac{(n+1)\,{}_{2n}C_n}{2^{2n}}$$

よって　　$2A=n\left(1-\frac{{}_{2n}C_n}{2^{2n}}\right)+\left\{A+1-\frac{(n+1)\,{}_{2n}C_n}{2^{2n}}\right\}$

ゆえに　　$A=n-\frac{n\,{}_{2n}C_n}{2^{2n}}+1-\frac{(n+1)\,{}_{2n}C_n}{2^{2n}}$

$$=n+1-\frac{(2n+1)\,{}_{2n}C_n}{2^{2n}}$$

したがって

$$E(X)=(n+1)+\left\{n+1-\frac{(2n+1)\,{}_{2n}C_n}{2^{2n}}\right\}$$

$$=2(n+1)-\frac{(2n+1)\,{}_{2n}C_n}{4^n} \qquad \cdots\cdots ②$$

煩雑な計算になりましたが，試合数の期待値 $E(X)$ を n の式で表すことができました。

§3. 最大試合数が大きいときの試合数の期待値

②において $n=10$ とすると，$E(X)=18.29986\cdots\cdots$，約18.3試合となります。最も多くても21試合なので，予想していた期待値より大きい結果となりました。

$E(X)=2(n+1)-\dfrac{(2n+1)_{2n}C_n}{4^n}$ ……② において

$$P_n=\frac{(2n+1)_{2n}C_n}{4^n}=\frac{(2n+1)}{4^n}\times\frac{(2n)!}{n!n!}$$

とします。

この式を変形して整理すると

$$P_n{}^2=\frac{1\times3}{2^2}\times\frac{3\times5}{4^2}\times\frac{5\times7}{6^2}\times\cdots\cdots\times\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}\times(2n+1)$$

となります。ここで，ウォリスの公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\times3}{2^2}\times\frac{3\times5}{4^2}\times\frac{5\times7}{6^2}\times\cdots\cdots\times\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}=\frac{2}{\pi}$$

を利用します。（ウォリスの公式は，参考文献〔1〕を検索してみてください。数学Ⅲの知識で証明できます。）

P_n は発散し，n を大きくすると $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\times\sqrt{2n+1}$ に近づきそうです。厳密性を欠くとのご指摘はあると思いますが，このまま進めていきます。

試合数の最大値を $U_n=2n+1$ とすると，期待値 $E(X)$ は，$U_n-\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sqrt{U_n}+1$ に近づきます。

$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\fallingdotseq0.7978\fallingdotseq0.8$ とすると，

$E(X)\to U_n-0.8\sqrt{U_n}+1$ となり，比較的簡単に計算ができそうです。

日本シリーズの場合でやってみます。($U_3=7$)

$E(X)\to7-0.8\sqrt{7}+1\fallingdotseq5.88$ となり，真の値5.8125とは少し差があります。

$U_{10}=21$ のとき，$E(X)\to21-0.8\sqrt{21}+1\fallingdotseq18.33$ となり，かなり真の値18.29986…… に近づきます。

$U_{100}=201$ のとき，

$E(X)\to201-0.8\sqrt{201}+1\fallingdotseq190.65$ となります。

もし，今までの理論が正しければ，この値は真の値とほとんど同じになるはずです。また，n が大きくなると，$+1$ の影響はほとんどなくなります。

§4. おわりに

日本シリーズの時期が近づくたびに，最大試合数が大きくなると期待値はどれぐらいの値に落ち着くのか気になっていました。最大試合数と期待値の比 $\dfrac{E(X)}{U_n}=1-\sqrt{\dfrac{2}{\pi U_n}}+\dfrac{1}{U_n}$ は1に限りなく近づき，差 $U_n-E(X)=\sqrt{\dfrac{2U_n}{\pi}}-1$ は無限大に発散するという不思議な結果となりました。

1試合行ってAチームが勝つ確率を p，Bチームが勝つ確率を q，引き分けなし($p+q=1$)と条件を一般化したら，期待値がどうなるのか興味があります。②より小さい値になると見当をつけることはできますが，正確な値を知りたいです。

《参考文献》

〔1〕 物理のかぎしっぽ
https://hooktail.sub.jp/contributions/tech.pdf
恐るべし、数学技術－ガウス積分とバーゼル問題

（福岡県立光陵高等学校）