生徒からの興味深い質問について
～根軸の一般化と極形式における曲線の長さの公式導出時の失敗例～

竹内(たけうち)　智則(としのり)

§1. はじめに

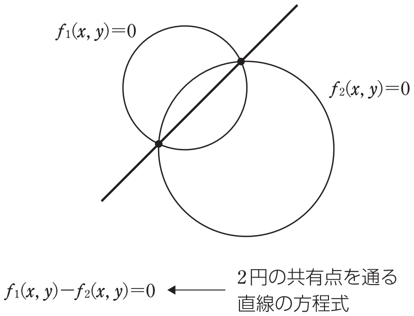
私は，これまでの教員人生の中で，才能豊かな多くの生徒たちと関わる機会を持つことができた。生徒からの質問は意義深く，今も考えさせられているものが多々ある。多くの先生方に，共有させていただきたいと考え，本稿ではかつて勤務していた学校で受けた2つの質問についてまとめてみた。

§2. この直線の意味は何ですか

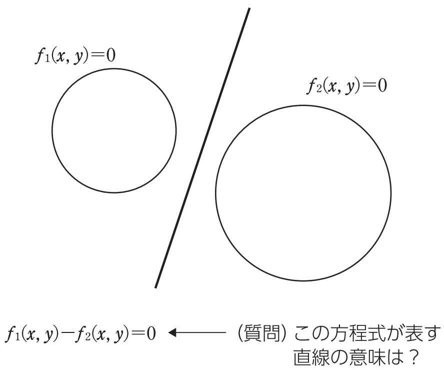
数学Ⅱ「図形と方程式」の授業後の質問である。

「2円の交点を求める問題を解くとき，2円の方程式同士を引きますよね。それが2円の交点を通る直線の式を表すということは理解してます。しかし，2円が交点をもたないときでも，2円の方程式同士を引けば直線の式がでます。この直線は何を表しているのですか。」

2円が共有点をもつとき



2円が共有点をもたないとき



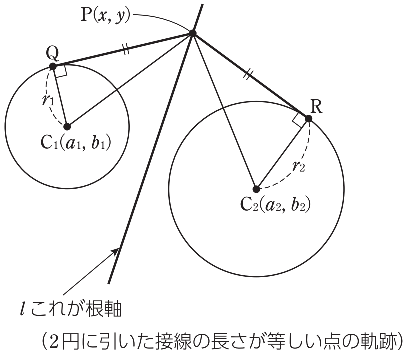
この質問についての私の回答は，次の通りである。結論から言うと，この直線は一般に根軸と呼ばれ，2円 C_1，C_2 に引いた接線の長さが等しい点の軌跡である。

【参考】

2円 $\begin{cases} C_1 : (x-a_1)^2+(y-b_1)^2-r_1{}^2=0 \ (r_1>0) \\ C_2 : (x-a_2)^2+(y-b_2)^2-r_2{}^2=0 \ (r_2>0) \end{cases}$

とする。

点Pの座標を$(x,\ y)$とし，点Pから円 C_1，C_2 に引いた接線の距離が等しいとする。円 C_1，C_2 上の接点をそれぞれQ，Rとすると



$$\mathrm{PQ}=\sqrt{\mathrm{PC_1}^2-\mathrm{QC_1}^2}=\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-r_1{}^2}$$

$$\mathrm{PR}=\sqrt{\mathrm{PC_2}^2-\mathrm{RC_2}^2}=\sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2-r_2{}^2}$$

$\mathrm{PQ}=\mathrm{PR}$ であるから　　$\mathrm{PQ}^2=\mathrm{PR}^2$

すなわち

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-r_1{}^2$$
$$=(x-a_2)^2+(y-b_2)^2-r_2{}^2$$

よって

$$\{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-r_1{}^2\}$$
$$-\{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2-r_2{}^2\}=0$$

この式を整理し，次の直線 l の式が導き出される。

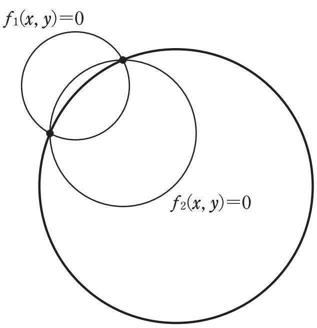
直線 l：$2(a_1-a_2)x+2(b_1-b_2)y-(a_1{}^2-a_2{}^2)$
$\qquad -(b_1{}^2-b_2{}^2)+(r_1{}^2-r_2{}^2)=0$

この直線 l を根軸という。

根軸を説明することで，生徒は一旦納得してくれた。ところが，その生徒は新たな疑問を持ったようだ。翌日の質問である。

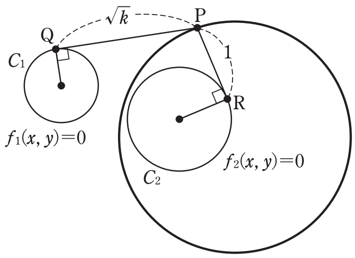
「先生，昨日の根軸の話を，2 円の共有点を通る図形の話に一般化してみました。**2 円が共有点をもたなくても，$f_1(x,\ y)-kf_2(x,\ y)=0$ ($k \fallingdotseq 1$) の式が表す図形について説明できます。**」

2 円が共有点をもつとき



$f_1(x, y)-kf_2(x, y)=0$ ← 2円の共有点を通る図形の方程式（$k=1$ のときは根軸）

2 円が共有点をもたないとき



$C: f_1(x, y)-kf_2(x, y)=0$ ← この方程式が表す図形の意味を考えたとのこと

「**方程式 $f_1(x,\ y)-kf_2(x,\ y)=0$ ($k>0,\ k\fallingdotseq 1$) で表される図形 C は，2 円 C_1，C_2 に引いた接線の長さが $\sqrt{k}$ ：1 である点の軌跡です。**」

【生徒の説明】

2 円　C_1：$f_1(x,\ y)=0$，C_2：$f_2(x,\ y)=0$

$$\begin{cases} f_1(x,\ y)=(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-r_1{}^2 & (r_1>0) \\ f_2(x,\ y)=(x-a_2)^2+(y-b_2)^2-r_2{}^2 & (r_2>0) \end{cases}$$

とする。

点 P の座標を $(x,\ y)$，円 C_1，C_2 上の接点をそれぞれ Q，R，$\mathrm{PQ}:\mathrm{PR}=\sqrt{k}:1$ とすると

$$\mathrm{PQ}^2:\mathrm{PR}^2=k:1$$

よって　　$\mathrm{PQ}^2-k\mathrm{PR}^2=0$　　…… ①

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-r_1{}^2},$$
$$\mathrm{PR}=\sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2-r_2{}^2}$$

であるから，① より

$$\{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-r_1{}^2\}-k\{(x-a_2)^2$$
$$+(y-b_2)^2-r_2{}^2\}=0$$

これが，図形 C の方程式 $f_1(x,\ y)-kf_2(x,\ y)=0$ です。

なるほど，よく考えた。ただし，方程式 $f_1(x,\ y)-kf_2(x,\ y)=0$ が常に図形を表すとは限らない。実際に，グラフソフトで k の値を変化させ，図形が表示されない場合があることを確認した。しかし，その条件の計算は複雑であるので，後日改めて次のように説明をした。

【参考】

方程式 $f_1(x,\ y)-kf_2(x,\ y)=0$，すなわち

$$\{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-r_1{}^2\}$$
$$-k\{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2-r_2{}^2\}=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

が図形を表すための実数 k の条件は，以下の通りである。

②を変形して

$$\left(x-\frac{a_1-ka_2}{1-k}\right)^2+\left(y-\frac{b_1-kb_2}{1-k}\right)^2$$
$$=\frac{r_1{}^2-kr_2{}^2}{1-k}+\frac{k\{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2\}}{(1-k)^2}$$

(右辺)$\geqq 0$ となることが必要十分条件であるから

$$\frac{r_1{}^2-kr_2{}^2}{1-k}+\frac{k\{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2\}}{(1-k)^2}\geqq 0$$

ただし，$k>0$，$k\neq 1$

この条件を満たさないと，②は図形を表さない。

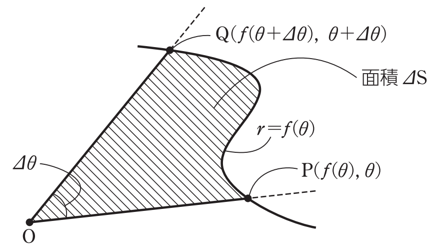
§3. 扇形で近似できると言ったのに

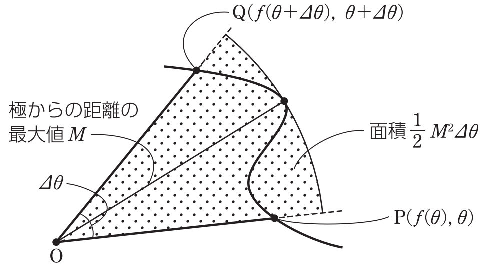
次は，数学Ⅲ「積分法の応用」の授業後の質問である。

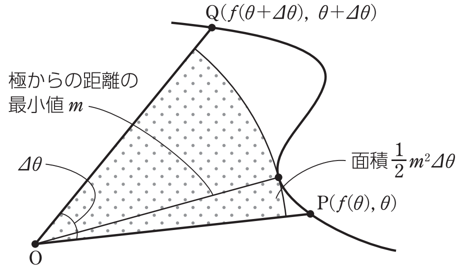
「極方程式で表された曲線と直線で囲まれた部分の面積の公式 $S=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\alpha^\beta r^2 d\theta$ を導出するときに，授業では微小区間における扇形の面積を近似値として用いている。**同様に，微小区間における扇形の弧の長さを近似値として用いて，曲線の長さの公式 $\boldsymbol{l=\displaystyle\int_\alpha^\beta r\,d\theta}$ を導いてみたのですが，これは正しい公式 $\boldsymbol{l=\displaystyle\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta}$ と違いました。**なぜ違うのですか。」

この質問についての私の回答は，次の通りである。

微小区間 $[\theta,\ \theta+\varDelta\theta]$ における，極から曲線 $r=f(\theta)$ までの距離の最小値を m，最大値を M とする。面積であれば，図形OPQ の面積 $\varDelta S$ について







$\dfrac{1}{2}m^2\varDelta\theta<\varDelta S<\dfrac{1}{2}M^2\varDelta\theta$ …… ① が必ず成立。

( であるから)

①を変形し

$$\frac{1}{2}m^2<\frac{\varDelta S}{\varDelta\theta}<\frac{1}{2}M^2$$

$\varDelta\theta\to 0$ とすると，$m\to r$，$M\to r$，$\dfrac{\varDelta S}{\varDelta\theta}\to\dfrac{dS}{d\theta}$

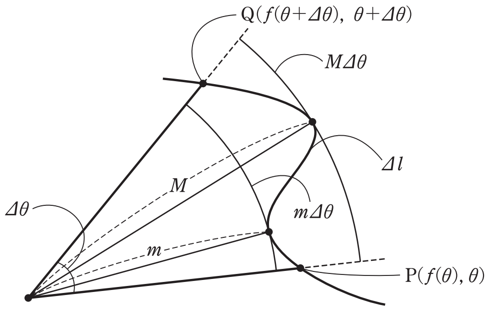
であるから，はさみうちの原理により　$\dfrac{dS}{d\theta}=\dfrac{1}{2}r^2$

よって，面積の公式 $S=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\alpha^\beta r^2 d\theta$ が導き出される。

しかし，曲線の長さの場合，曲線PQ の長さ $\varDelta l$ について

$$m\varDelta\theta<\varDelta l<M\varDelta\theta \qquad \cdots\cdots ②$$

が一般には成立しないことは，次の図で直感的に理解できる。



＊この図では，$\Delta l < M\Delta\theta$ が成立していない。

②が常に成立するとして

$$m < \frac{\Delta l}{\Delta\theta} < M$$

と進んでしまうと，誤った公式が出てしまう。

この回答に対し，質問した生徒は

「先生が授業で，面積の公式を説明された際に『扇形の面積で近似できる』と仰っていたのが印象深く，曲線の長さについても同じように考えられるのではないかと思いました。」と話をしてくれた。

確かに自分は，このような疑問が生まれることも考えずに，微小な区間であれば，曲線と直線で囲まれた部分の面積は扇形の面積で近似できるという指導をしていた。しかし，その指導だけでは，この生徒のように曲線の長さも扇形の弧の長さで近似をして，公式を求めてしまう間違いにつながる。生徒にとって，扇形で近似する方法が面積ではよくて，曲線の長さでは誤った結果につながるというのはすぐに納得できるものではない。**厳密にははさみうちの原理で面積についての証明をすることで，このような誤解は防げると考える。**

今回は，2 つの質問について紹介させていただいた。本稿を読まれた先生方の指導の一助となれば幸いである。

《参考文献》

〔1〕「新課程　チャート式　基礎からの数学Ⅲ＋C〔ベクトル，複素数平面，式と曲線〕」数研出版(2023)

(茨城県立中央高等学校)