

# オリジナル・スタンダード数学演習Ⅲ・C にみる有名無限級数

たかぎ けいすけ  
高木 圭介

## §1. はじめに

入試問題演習を行うとき、時間の制約で、つい解答の解説に終始してしまい反省をすることが多いが、昨年、参考文献[1]に収録されている入試問題を用いて、有名無限級数の証明を定型化する授業を試みたので、ご紹介したい。

## §2. 階乗数の逆数の交代和

次の【問題1】は、2018年に大阪府立大学で出題された入試問題である。

【問題1】(参考文献[1] p.60 問題A 186)

自然数  $n$  に対して、 $S_n = \int_1^e (\log x)^n dx$  とする。

- (1)  $S_1$  を求めよ。
- (2)  $S_{n+1}$  を  $S_n$  と  $n$  の式で表せ。
- (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  を求めよ。
- (4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n S_n$  を求めよ。

[18 大阪府大・現代システム科学域、  
生命環境科学域第4問]

【設問の追加】

- (5) 「 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$  を証明せよ。」

筆者のオリジナルの設問として、上記の(5)を【問題1】に追加すると、無限級数の和を求める問題としても活用できる。

## 【(5)の解答】

(2)で求めた漸化式

$$S_{n+1} = -(n+1)S_n + e \quad \dots\dots ①$$

の両辺に  $\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$  を掛けると

$$\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} S_{n+1} = \frac{(-1)^n}{n!} S_n + \frac{(-1)^{n+1} e}{(n+1)!}$$

となる。

初項として、 $S_0 = e - 1$  を用いると、階差数列の公式より、 $n \geq 1$  のとき

$$\frac{(-1)^n}{n!} S_n = \frac{1}{0!} S_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1} e}{(k+1)!} \quad \dots\dots ②$$

を得る。

ここで、 $n \rightarrow \infty$  とすると、 $S_n \rightarrow 0$  であるから、

$$② \text{より } S_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} e}{(k+1)!} = 0 \text{ となり}$$

$$e - 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} e}{(k+1)!} = 0$$

$$\text{よって } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e}$$

つまり、 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$  が証明された。

(5)を追加することで

$$\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots\dots = \frac{1}{e}$$

が証明できる。

## 【評価式について】

余談だが、入試問題の解答としては、(3)においては  $S_n$  の評価式として「 $S_n \geq 0$ 」を用い、

$$[0 \leq S_n \leq \frac{e}{n+1}] \text{ を利用すると思うが、} [S_{n+1} \leq S_n]$$

を用いると、より正確な評価式を得る。

①より  $S_n \geq -(n+1)S_n + e$  であるから

$$S_n \geq \frac{e}{n+2} \quad \dots\dots ③$$

また、①より  $S_{n+1} \leq -(n+1)S_{n+1} + e$  となるので、  
 $S_{n+1} \leq \frac{e}{n+2}$  となり  $S_n \leq \frac{e}{n+1}$  …… ④

③、④より  $\left[ \frac{e}{n+2} \leq S_n \leq \frac{e}{n+1} \right]$  を導くと

(3)、(4)の答えは、ほぼ自明となる。

**【定型化】**

定積分の漸化式を階差型に変形し、一般項が0に収束すれば、階差数列の公式を用いて無限級数の和を得る。

**§3. グレゴリー・ライプニッツ級数など**

次の【問題2】は、2016年に旭川医科大学で出題された入試問題である。

**【問題2】** (参考文献[1] p.66 問題A 204)

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) とおく。

(1)  $\tan x \leq x + 1 - \frac{\pi}{4}$  ( $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ ) が成り立つことを示せ。

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$  を求めよ。

(3)  $I_n + I_{n+2}$  の値を  $n$  を用いて表せ。

(4) (3)までの結果を用いて、無限級数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$  の和を求めよ。

[16 旭川医大第1問]

**【解説】**

階差数列の公式による無限級数の和の求め方を理解しておく、生徒もそれぞれの設問の意図が理解できるように。

**【(4)の解答】**

(3)の漸化式  $I_{n+2} = -I_n + \frac{1}{n+1}$  …… ① において、  
 $n=2k-1$  ( $k$  は正の整数) とすると、

$I_{2k+1} = -I_{2k-1} + \frac{1}{2k}$  であるから、両辺に  $(-1)^{k+1}$  を掛けると

$$(-1)^{k+1} I_{2k+1} = (-1)^k I_{2k-1} + \frac{(-1)^{k+1}}{2k}$$

を得る。

階差数列の公式より、 $k \geq 2$  のとき

$$(-1)^k I_{2k-1} = (-1)^1 I_1 + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{(-1)^{n+1}}{2n} \dots\dots ②$$

ここで、 $k \rightarrow \infty$  とすると、(2)より  $I_{2k-1} \rightarrow 0$  であるから、②より  $-I_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n} = 0$  となり、

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n} = I_1$  が成り立つ。ここで

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx = \left[ -\log |\cos x| \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \log 2$$

より  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n} = \frac{1}{2} \log 2$

である。

**【設問の追加】**

- (5) 無限級数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  の和を求めよ。
- (6) 無限級数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$  の和を求めよ。

筆者のオリジナルの設問として、上記の(5)、(6)を【問題2】に追加する。

**【設問の意図】**

(4)で得た偶数の逆数の交代和、つまり

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \dots\dots = \frac{1}{2} \log 2$$

の両辺を2倍することで、自然数の逆数の交代和、つまり、メルカトル級数

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots\dots = \log 2$$

を示すことができる。また、(3)の  $I_{n+2} = -I_n + \frac{1}{n+1}$

で  $n=2k$  ( $k$  は非負整数) とすると、奇数の逆数の交代和、つまり、グレゴリー・ライプニッツ級数

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots\dots = \frac{\pi}{4}$$

を得る。

**【解答】**

(5) (4)で求めた  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n} = \frac{1}{2} \log 2$  の両辺を2倍して

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2$$

(6) (3)の  $I_{n+2} = -I_n + \frac{1}{n+1}$  で  $n=2k$  ( $k$  は非負整数) とすると,  $I_{2k+2} = -I_{2k} + \frac{1}{2k+1}$  となり,

両辺に  $(-1)^{k+1}$  を掛けると

$$(-1)^{k+1}I_{2k+2} = (-1)^k I_{2k} + \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$$

を得る。

階差数列の公式より,  $k \geq 1$  のとき

$$(-1)^k I_{2k} = (-1)^0 I_0 + \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

ここで,  $k \rightarrow \infty$  とすると, (2)より  $I_{2k} \rightarrow 0$  であるから,  $\textcircled{3}$ より  $I_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} = 0$  となり

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = I_0$$

ここで,  $I_0 = \frac{\pi}{4}$  より  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

**【評価式について】**

この問題は, 評価式として,  $0 \leq \tan^n x \leq \left(x + 1 - \frac{\pi}{4}\right)^n$

$$\text{より } 0 \leq I_n \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(x + 1 - \frac{\pi}{4}\right)^n dx$$

つまり,  $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)^{n+1} \right\}$  を示唆して

いる。これは, 受験生の微分の学力を問うための設問だとすると妥当であるが, 「 $I_{n+2} \leq I_n$ 」を利用すると,

$I_{n+2} = -I_n + \frac{1}{n+1}$  と組み合わせることで,

$$\text{より精度の高い評価式, } \frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$$

( $n \geq 2$ ) を導くことができる。これを利用すると,  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$  は自明であるし, §2の【問題1】(4)の

ように,  $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = \frac{1}{2}$  を求めることもできる。

**§4. 定積分の漸化式を用いた無限級数の和の求め方**

**【まとめ】**

定積分の漸化式を導き, それを階差型の漸化式

$a_{n+1} = a_n + f(n)$  に変形し,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  が成り立て

ば, 階差数列の公式を経て

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = -a_1 \text{ あるいは } \sum_{n=0}^{\infty} f(n) = -a_0 \text{ を得る。}$$

このことにより, 【問題1】, 【問題2】から

**有名無限級数**

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \log 2$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \dots = \frac{1}{2} \log 2$$

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots = \frac{1}{e}$$

が証明できた。

この授業のあと, 次の演習を課した。

**【演習1】**

$I_n = \int_0^1 e^{-x} x^n dx$  ( $n=0, 1, 2, 3, \dots$ ) を用いて, 無限級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$  の和を求めよ。

**【演習2】**

自然数  $n$  に対して,  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} > \log(n+1)$  を示し,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  が発散することを証明せよ。

**《参考文献》**

- [1] 「新課程 オリジナル・スタンダード数学演習 Ⅲ・C〔複素数平面, 式と曲線〕受験編」数研出版 (2023)

(福岡県立修猷館高等学校)