

図を活用した技法としての「部分積分法」

さわはた みちまさ
澤幡 通正

§1. はじめに

「数学Ⅲ」の積分の分野では、2つの技法を学修することになっている。1つは、「置換積分法」、もう1つは「部分積分法」である。ここでは、図を活用することで「不定積分、定積分の部分積分法」という技法を、比較的容易に身につけることができることを提示したい。ただし、定積分も同様なので、本稿では、不定積分の部分積分法のみを扱うものとする。

§2. 「部分積分法」とは

不定積分の部分積分法とは、 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数の1つとすると、次のような技法である。

$$\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx$$

……(*)

この公式を見ると、不定積分の部分積分法を用いる「コツ」は、次の3点であろう。

コツ(1) 積分したい被積分関数は、2つの関数の積 $f(x)g(x)$ の形と考える。

コツ(2) コツ(1)の2つの関数の積 $f(x)g(x)$ は
(積分しやすい関数)×(微分しやすい関数)

……(**)

と考える。

コツ(3) (**)のとき、コツ(1)の積分したい被積分関数が、1回目の部分積分による計算の後には、より積分しやすい被積分関数になっている。

つまり、計算後にコツ(3)になるように、コツ(2)の(**)の組を考えることが重要であろう。

ここで、積分したい被積分関数は、多項式関数、指数関数、対数関数、三角関数のいずれか2つの関数の積で表されるとする。これらの異なる4種類から異なる2種類を選ぶと、次の1~6の6通りが考

えられる。さらに、次の1.~6.は(**)、つまり2つの関数の積として

(積分しやすい関数)×(微分しやすい関数)

の順も考慮して記載した。

1. 指数関数×多項式関数
2. 多項式関数×対数関数
3. 三角関数×多項式関数
4. 指数(三角)関数×三角(指数)関数
5. 指数関数×対数関数
6. 三角関数×対数関数

ここで、実際に、不定積分の部分積分法を用いる一例を述べてみる。なお、『教』とは参考文献[1]、『青』とは参考文献[2]の略である。また、『教』については、例題、練習から、『青』については、重要例題から選択している。

コツ(2)を意識するだけでも、積分を求める達成率は向上すると思われる。ここでは、次の【例題】を題材に、【解説】内の[note]を用意することを提示したい。ただし、部分積分法で使用する「積分しやすい関数」、「微分しやすい関数」の捉え方は、少々経験が必要なのは事実である。その目安が、先述の1.~6.というわけである。なお、高校で扱う積分の大半は、積分可能な1.~4.の4パターンに集約される。

§3. 実践例

【例題】 次の不定積分を求めよ。

- (1) $\int x \log x dx$ (『教』 p.154 例題4(2))
- (2) $\int \log(x+1) dx$ (『教』 p.155 練習10 改)
- (3) $\int x^2 e^x dx$ (『教』 p.155 例題5 改)
- (4) $\int e^x \sin x dx$ (『青』 p.233 重要例題137 改)

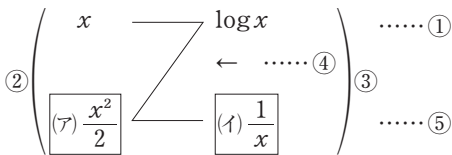
【解説】

被積分関数は、2つの関数の積の形であることを意識させた後、それらのうちどちらが「積分しやすい関数」 $f(x)$ で、どちらが「微分しやすい関数」 $g(x)$ なのかを、とりあえずおいてみる。その後、コツ(3)を使用する。

- (1) $f(x)=x, g(x)=\log x$ とすればよい。まず、1行目に、積分しやすい関数 $f(x)$ 、微分しやすい関数 $g(x)$ の順に横に並べて書く(①)。次に、 $(ア)$ には、 x の原始関数の1つを(②)、 $(イ)$ には、 $\log x$ を微分したものを(③)を書く。最後に、「Zのマーク」Zを書く(④)。

[note]

[図1]



ここまで準備すれば、問題の不定積分を求めることができる。「部分積分法」の技法において、第1行目①の2つの関数の積が被積分関数であり、④は、(*)の右辺の第一式である。また第2行目⑤は、(*)の右辺の2つの被積分関数の積を表す。ただし、(*)の右辺の不定積分の前の符号としてマイナス「-」をつけるものとする。

文で説明すると面倒に感じるが、実際、黒板の前で(ア)を求める際には、「 x の原始関数の1つを求めようね」とか、「(イ)で $\log x$ の微分は基本的だよ」とか、最後に「Zのマークだ」とか言いながら、[図1]を完成させるとよい。すると、[図1]を見ながら、次のように書き下せるだろう。

$$\begin{aligned} \int x \log x \, dx &= \overset{\textcircled{1}}{\frac{x^2}{2}} \log x - \int \overset{\textcircled{4}}{\frac{x^2}{2}} \cdot \overset{\textcircled{5}}{\frac{1}{x}} \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x}{2} \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

- (2) (1)のような、図による部分積分法を用いるのが有効なのは、この(2)の場合であろう。

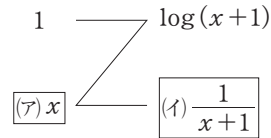
2つの関数として、

$$f(x)=1, g(x)=\log(x+1)$$

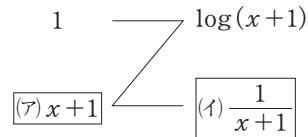
と考える。

[note]

[図2] (その1)



(その2)



[図2]で、1の原始関数の1つは x でもよいが、(その1)の場合、コツ(3)がやや困難である。それなら、1の原始関数の1つとして、(その2)の場合のように $x+1$ をとると、コツ(3)が容易であるとわかるのではないだろうか。

つまり

$$\int \log(x+1) \, dx = x \log(x+1) - \int x \cdot \frac{1}{x+1} \, dx$$

よりも

$$\int \log(x+1) \, dx$$

$$= (x+1) \log(x+1) - \int (x+1) \cdot \frac{1}{x+1} \, dx$$

とした方が、右辺の積分が容易であると自主的にひらめくようになるのではないだろうか。計算結果は次のようになる。

$$\int \log(x+1) \, dx$$

$$= (x+1) \log(x+1) - \int (x+1) \cdot \frac{1}{x+1} \, dx$$

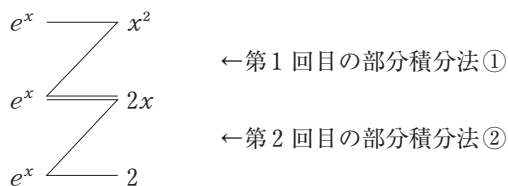
$$= (x+1) \log(x+1) - \int dx$$

$$= (x+1) \log(x+1) - x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

(3) この問題では、2回とも e^x を積分しやすい関数として扱い、部分積分法を2回使用すればよい。その際、次のように、あえて1回目の計算を残したままにしておく(①)と、2回目の部分積分法が1回目の下に書き下せる(②)。

[note]

[図3]



$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x \cdot e^x dx \quad \leftarrow ①$$

$$= x^2 e^x - (2x e^x - \int 2e^x dx) \quad \leftarrow ②$$

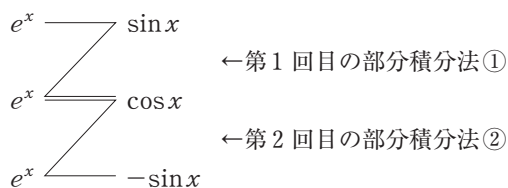
$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$$

$$= (x^2 - 2x + 2)e^x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

(4) 被積分関数が指数関数と三角関数の積の場合は、どちらを積分しやすい関数としてもよい。今回は、部分積分法を2回使用するのので、例えば、指数関数を「積分しやすい関数」と決めたなら、2回とも指数関数をそれとして扱えばよい。

[note]

[図4]



$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cdot \cos x dx \quad \leftarrow ①$$

$$= e^x \sin x - \left\{ e^x \cos x - \int (-e^x \cdot \sin x) dx \right\} \quad \leftarrow ②$$

であるから

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$$

(C は積分定数)

【解説】は以上とする。なお、そのうちに[note]を書き下さなくても、それを思い浮かべるだけで部分積分法の技法が使えるようになることは実証済みである。

《参考文献》

[1] 「数学Ⅲ」数研出版(2023)

[2] 「新課程 チャート式 基礎からの数学Ⅲ」数研出版(2023)

(茨城県 水戸葵陵高等学校)