図を活用した技法としての「部分積分法」

澤幡（さわはた）　通正（みちまさ）

§1．はじめに

「数学Ⅲ」の積分の分野では，2 つの技法を学修することになっている。1 つは，「**置換積分法**」，もう 1 つは「**部分積分法**」である。ここでは，図を活用することで「**不定積分，定積分の部分積分法**」という技法を，比較的容易に身につけることができることを提示したい。ただし，定積分も同様なので，本稿では，不定積分の部分積分法のみを扱うものとする。

§2．「部分積分法」とは

不定積分の部分積分法とは，$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数の 1 つとするとき，次のような技法である。

$$\int f(x)g(x)\,dx = \underset{\text{積分}}{F(x)}\overset{\text{そのまま}}{g(x)} - \int \underset{\text{積分}}{F(x)}\overset{\text{微分}}{g'(x)}\,dx$$

……(＊)

この公式を見ると，不定積分の部分積分法を用いる「**コツ**」は，次の 3 点であろう。

コツ⑴　積分したい被積分関数は，2 つの関数の積 $f(x)g(x)$ の形と考える。

コツ⑵　コツ⑴の 2 つの関数の積 $f(x)g(x)$ は

(積分しやすい関数)×(微分しやすい関数)

……(＊＊)

と考える。

コツ⑶　(＊＊)のとき，コツ⑴の積分したい被積分関数が，1 回目の部分積分による計算の後には，より積分しやすい被積分関数になっている。

つまり，計算後にコツ⑶になるように，コツ⑵の(＊＊)の組を考えることが重要であろう。

ここで，積分したい被積分関数は，多項式関数，指数関数，対数関数，三角関数のいずれか 2 つの関数の積で表されるとする。これらの異なる 4 種類から異なる 2 種類を選ぶと，次の 1～6 の 6 通りが考えられる。さらに，次の **1.** ～**6.** は(＊＊)，つまり 2 つの関数の積として

(積分しやすい関数)×(微分しやすい関数)

の順も考慮して記載した。

1．指数関数×多項式関数
2．多項式関数×対数関数
3．三角関数×多項式関数
4．指数(三角)関数×三角(指数)関数
5．指数関数×対数関数
6．三角関数×対数関数

ここで，実際に，不定積分の部分積分法を用いる一例を述べてみる。なお，『教』とは参考文献〔1〕，『青』とは参考文献〔2〕の略である。また，『教』については，例題，練習から，『青』については，重要例題から選択している。

コツ⑵を意識するだけでも，積分を求める達成率は向上すると思われる。ここでは，次の**【例題】**を題材に，**【解説】**内の[**note**]を用意することを提示したい。ただし，部分積分法で使用する「**積分しやすい関数**」，「**微分しやすい関数**」の捉え方は，少々経験が必要なのは事実である。その目安が，先述の **1.** ～**6.** というわけである。なお，高校で扱う積分の大半は，積分可能な **1.** ～**4.** の 4 パターンに集約される。

§3．実践例

【例題】　次の不定積分を求めよ。

⑴　$\int x\log x\,dx$　　（『教』p.154 例題 4⑵）

⑵　$\int \log(x+1)\,dx$　（『教』p.155 練習 10　改）

⑶　$\int x^2e^x\,dx$　　（『教』p.155 例題 5　改）

⑷　$\int e^x\sin x\,dx$（『青』p.233 重要例題 137　改）

【解説】

被積分関数は，2 つの関数の積の形であることを意識させた後，それらのうちどちらが「**積分しやすい関数**」$f(x)$ で，どちらが「**微分しやすい関数**」$g(x)$ なのかを，とりあえずおいてみる。その後，コツ⑶を使用する。

⑴ $f(x)=x$，$g(x)=\log x$ とすればよい。まず，1 行目に，積分しやすい関数 $f(x)$，微分しやすい関数 $g(x)$ の順に横に並べて書く(①)。次に，$\boxed{\quad(ア)\quad}$ には，x の原始関数の 1 つを(②)，$\boxed{\quad(イ)\quad}$ には，$\log x$ を微分したもの(③)を書く。最後に，「Z のマーク」Z を書く(④)。

［**note**］

［図 1］

$$②\left(\begin{array}{ccc} x & & \log x \\ & \leftarrow & \cdots\cdots④ \\ \boxed{(ア)\ \dfrac{x^2}{2}} & & \boxed{(イ)\ \dfrac{1}{x}} \end{array}\right)③ \quad \begin{array}{l} \cdots\cdots① \\ \\ \cdots\cdots⑤ \end{array}$$

ここまで準備すれば，問題の不定積分を求めることができる。「部分積分法」の技法において，第 1 行目①の 2 つの関数の積が被積分関数であり，④は，(＊)の右辺の第一式である。また第 2 行目⑤は，(＊)の右辺の 2 つの被積分関数の積を表す。ただし，(＊)の右辺の不定積分の前の符号として**マイナス**「－」をつけるものとする。

文で説明すると面倒に感じるが，実際，黒板の前で(ア)を求める際には，「x の原始関数の 1 つを求めようね」とか，「(イ)で $\log x$ の微分は基本的だよね」とか，最後に「Z のマークだ」とか言いながら，［図 1］を完成させるとよい。すると，［図 1］を見ながら，次のように書き下せるだろう。

$$\underset{\substack{\uparrow\\①}}{\int x\log x\,dx}=\underset{\substack{\uparrow\\④}}{\frac{x^2}{2}\log x}-\int\underset{\substack{\uparrow\\⑤}}{\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}}\,dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\log x-\int\frac{x}{2}\,dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\log x-\frac{x^2}{4}+C \quad (C \text{ は積分定数})$$

⑵ ⑴のような，図による部分積分法を用いるのが有効なのは，この⑵の場合であろう。

2 つの関数として，

$$f(x)=1,\ g(x)=\log(x+1)$$

と考える。

［**note**］

［図 2］ (その 1)

$$\begin{array}{ccc} 1 & & \log(x+1) \\ \boxed{(ア)\ x} & & \boxed{(イ)\ \dfrac{1}{x+1}} \end{array}$$

(その 2)

$$\begin{array}{ccc} 1 & & \log(x+1) \\ \boxed{(ア)\ x+1} & & \boxed{(イ)\ \dfrac{1}{x+1}} \end{array}$$

［図 2］で，1 の原始関数の 1 つは x でもよいが，(その 1)の場合，コツ⑶がやや困難である。それなら，1 の原始関数の 1 つとして，(その 2)の場合のように $x+1$ をとると，コツ⑶が容易であるとわかるのではないだろうか。

つまり

$$\int\log(x+1)\,dx=x\log(x+1)-\int x\cdot\frac{1}{x+1}\,dx$$

よりも

$$\int\log(x+1)\,dx$$

$$=(x+1)\log(x+1)-\int(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}\,dx$$

とした方が，右辺の積分が容易であると自主的にひらめくようになるのではないだろうか。計算結果は次のようになる。

$$\int\log(x+1)\,dx$$

$$=(x+1)\log(x+1)-\int(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}\,dx$$

$$=(x+1)\log(x+1)-\int dx$$

$$=(x+1)\log(x+1)-x+C \quad (C \text{ は積分定数})$$

(3) この問題では，2 回とも e^x を積分しやすい関数として扱い，部分積分法を 2 回使用すればよい。その際，次のように，あえて 1 回目の計算を残したままにしておく(①)と，2 回目の部分積分法が 1 回目の下に書き下せる(②)。

［**note**］

［図 3］

$$\begin{array}{lll} e^x & x^2 & \\ & & \leftarrow \text{第 1 回目の部分積分法①} \\ e^x & 2x & \\ & & \leftarrow \text{第 2 回目の部分積分法②} \\ e^x & 2 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int x^2e^x dx &= x^2e^x - \int 2x \cdot e^x dx && \leftarrow ① \\ &= x^2e^x - \left(2xe^x - \int 2e^x dx\right) && \leftarrow ② \\ &= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C \\ &= (x^2 - 2x + 2)e^x + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

(4) 被積分関数が指数関数と三角関数の積の場合は，どちらを積分しやすい関数としてもよい。今回は，部分積分法を 2 回使用するので，例えば，指数関数を「積分しやすい関数」と決めたなら，2 回とも指数関数をそれとして扱えばよい。

［**note**］

［図 4］

$$\begin{array}{lll} e^x & \sin x & \\ & & \leftarrow \text{第 1 回目の部分積分法①} \\ e^x & \cos x & \\ & & \leftarrow \text{第 2 回目の部分積分法②} \\ e^x & -\sin x & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x\, dx &= e^x \sin x - \int e^x \cdot \cos x\, dx \quad \leftarrow ① \\ &= e^x \sin x - \left\{e^x \cos x - \int (-e^x \cdot \sin x)\, dx\right\} \quad \leftarrow ② \end{aligned}$$

であるから

$$\int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$$

(C は積分定数)

【解説】は以上とする。なお，そのうちに［**note**］を書き下さなくても，それを思い浮かべるだけで部分積分法の技法が使えるようになることは実証済みである。

《参考文献》

〔1〕「数学Ⅲ」数研出版 (2023)

〔2〕「新課程　チャート式　基礎からの数学Ⅲ」数研出版 (2023)

(茨城県　水戸葵陵高等学校)