教室でみかけた素直な発見

内藤（ないとう）　康正（やすまさ）

§0．はじめに

普段，教室で，生徒たちは悩みながらも大小様々な発見をしている。しかし，その大半は見逃されているだろう。本稿では，かつて勤務していた学校で，筆者が偶然気づいたものの中から，興味深いものを紹介したい。

§1．組分け問題に七・五・三

【問題 1】（参考文献〔1〕p.124 重要例題 28(5)　改）
8 人の生徒を 2 人ずつ 4 組に分ける方法は何通りあるか。

答えの 105＝7×5×3 通りから，以前，次のような解法を考えたことがある。まず，8 人の生徒を A～H として，この順に横一列に並べる。

A，B，C，D，E，F，G，H

そして，左端の生徒が誰と組むかを順に考えるのだが，組が決まった生徒は列から抜けていく。具体的には，次の(1)，(2)，(3)のようになる。

(1)　左端の A と組む生徒は，B～H の 7 通り。
例えば，A と E が組んで，その 2 人が列から抜けると，次の状態になる。
□，B，C，D，□，F，G，H

(2)　左端の B と組む生徒は，C，D，F～H の 5 通り。
例えば，B と C が組んで，その 2 人が列から抜けると，次の状態になる。
□，□，□，D，□，F，G，H

(3)　左端の D と組む生徒は，F～H の 3 通り。それが決まれば，残りの 2 人が最後の組となり終了。

こう考えると，組分けの総数は，積の法則により

7×5×3＝105（通り）

である。通常の解法に比べて断然やさしい。そう思っていたところ，ある生徒が，教室でこの七・五・三方式を発見して，使っていたのだ。典型的解法の理解が必須であることに変わりはないが，数え上げ方を教わるのではなく，自分で数え上げているのがよい。汎用性がないかというとそうでもなく，次のようなパターンにも通用する。

【問題 2】（参考文献〔1〕p.125 問題 B 265(3)　改）
12 人の生徒を 3 人ずつ 4 組に分ける方法は何通りあるか。

左端の生徒と組む 2 人を選び続ければよく

$${}_{11}C_2\times{}_8C_2\times{}_5C_2=15400\ (\text{通り})$$

【問題 3】（参考文献〔2〕p.36 応用例題 5(2)　改）
7 人の生徒を 2 人，2 人，2 人，1 人の 4 組に分ける方法は何通りあるか。

1 人の組が誰かで 7 通り。あとは 6 人を 2 人ずつの 3 組に分けて　　7×(5×3)＝105（通り）

生徒の実態に応じた活用の仕方があると思う。楽ができる裏技になってほしくはないが。

§2．メネラウスのつぶやき

【問題 4】（参考文献〔2〕p.93 練習 12）
△ABC の辺 AB を 1：3 に内分する点を R，辺 AC を 2：3 に内分する点を Q とする。線分 BQ と線分 CR の交点を O，直線 AO と辺 BC の交点を P とする。
(1)　BP：PC を求めよ。
(2)　面積比 △OBC：△ABC を求めよ。

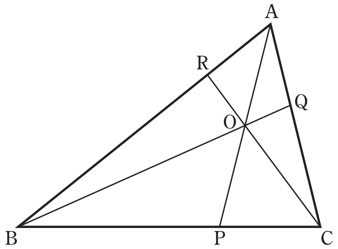
(2)では，△ABP と直線 CR にメネラウスの定理を用いて 3 点 A，O，P の位置関係を調べ，面積比に対応する三角形の高さの比を求めることが想定されている。

この問題に対して，ある日の授業で指名した生徒が，△BCQ と直線 AP にメネラウスの定理を用いて

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\times\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AQ}}\times\frac{\mathrm{QO}}{\mathrm{OB}}=1$$

から　$\dfrac{\mathrm{QO}}{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{5}$

として黒板に解答し始めた。



3 点 A，O，P の位置関係を知りたいから直線 AOP で切るという，ありがちな方針だ。そのうちやり直すだろうと待っていると，共通な底辺 BC をもつ △ABC，△QBC，△OBC に着目して

$$\triangle\mathrm{OBC}=\left(\triangle\mathrm{ABC}\times\frac{\mathrm{QC}}{\mathrm{AC}}\right)\times\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{QB}}$$
$$=\triangle\mathrm{ABC}\times\frac{3}{5}\times\frac{5}{6}=\cdots\cdots$$

として，こともなげに着席した。目的に応じた三角形と直線の選び方の強制は，このような素直な解法発見の機会を奪ってきたのか。メネラウスも「今頃気がついたのかい」とつぶやいているかもしれない。

§3. 解の配置の落とし穴

次は，いわゆる解の配置の問題であるが，ふつうは学習が進んだ生徒が自主的に解くような問題である。しかし，解いてみると，そこに意外な **“発見”** がある。

> **【問題 5】**（参考文献〔3〕p.214 重要例題 130）
> 方程式 $x^2+(2-a)x+4-2a=0$ が $-1<x<1$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

題意を満たす場合が 3 タイプある。なお，グラフは，方程式の左辺を $f(x)$ とおいたものである。

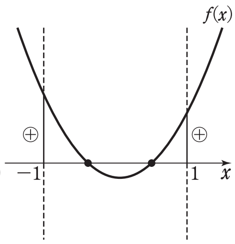
[1]　すべての解が $-1<x<1$ にある場合で

（i）$D\geqq 0$

（ii）$-1<$ 軸 <1

（iii）$f(-1)>0$，$f(1)>0$

の同時成立が条件。

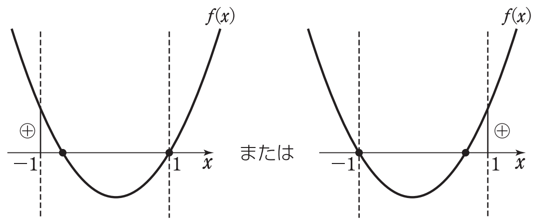


[2]　解の 1 つが $-1<x<1$ に，他方が $x<-1$ または $1<x$ にある場合で，次の 2 タイプに分かれる。

$f(-1)>0$ かつ $f(1)<0$

$f(-1)<0$ かつ $f(1)>0$

[3]　最後に，解の 1 つが $-1<x<1$ にあり，他方が ±1 である場合で，ここに落とし穴が潜んでいるのだ。



解答例では，次のように急に方針転換をする。

> -1 を解にもつときは，$f(-1)=0$ から $a=3$ だが，$f(x)=(x+1)(x-2)$ となって不適。1 を解にもつときを同様に調べて適することを確認。

ここで，生徒は 2 つに分かれる。方針転換の理由は気にせず，やり方を暗記して確実に得点につなげるのが第一のタイプだ。

第二は §1 や §2 で紹介したような，自分の解法を追求するタイプ。理由不明の方針転換には納得がいかず，[1]や[2]と同じように

$f(-1)>0$ かつ $f(1)=0$

　　または　$f(-1)=0$ かつ $f(1)>0$　　……①

とする**誤った解法**を **“発見”** したりする。この場合，指摘されない限り①が誤りであることも，それが理由での[3]の方針転換にも気づかないだろう。なぜならば，**【問題 5】**では，この **“発見”** からも正解が得られてしまうからだ。

§4. むすびに変えて

§1の七・五・三方式は「特定の誰々を含む幾人の選び方」の問題の応用である。「特定の誰々…」問題は，「特定の」の意味がわからず，難しく考える生徒が多いと思う。素直に考えれば答えが出るのが数学だというメッセージに使えそうである。

他方§3は，解の配置の勉強会で見かけた，自分で考えるより丸暗記の方が得をすることもあるという事例である。自分の頭で素直に考える生徒をうまく応援したいものである。

《参考文献》

〔1〕「新課程　教科書傍用　サクシード
数学Ⅰ＋A」数研出版(2021)
〔2〕「数学A」数研出版(2022)
〔3〕「新課程　チャート式　基礎からの数学
Ⅰ＋A」数研出版(2021)

（東京都立武蔵高等学校・附属中学校）