

数研通信 111 読者への挑戦状の答え ～ラグランジュの三角恒等式～オイラーの公式

たけだ まさふみ
武田 眞史

§1. 数研通信 111 の読者への挑戦状

数研通信 111 で、参考文献[1]を掲載していただきました。

その中で、「読者への挑戦状」として

$$\sum_{k=1}^n k \sin k\theta$$

を、その原稿内の手法を使って求めてみてください、と出題しましたので、その解答を本稿でお示したいと思います。解答だけではなく、私の頭の中身を紹介しつつ。

θ が π の整数倍のときに、和が 0 になることは自明であるから、そのときを除いて考える。

まず

$$\sum_{k=1}^n k \sin k\theta = -\frac{d}{d\theta} \sum_{k=1}^n \cos k\theta \quad \dots\dots ①$$

であるから

$$\sum_{k=1}^n \cos k\theta$$

を求めたい。数列の和を求めるには

$$\cos k\theta = a_{k+1} - a_k$$

を満たす、部分和数列 $\{a_k\}$ を求めればよい。

三角関数で、差の形を作るためには、和 $\rightarrow$ 積の公式がよいのではないかな。

とすると

$$\cos(k+1)\theta - \cos k\theta = -2 \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)\theta \sin \frac{\theta}{2} \quad \dots\dots ②$$

$$\sin(k+1)\theta - \sin k\theta = 2 \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)\theta \sin \frac{\theta}{2} \quad \dots\dots ③$$

$\cos k\theta$ が欲しいので、③の両辺を $2 \sin \frac{\theta}{2}$ で割

り、 k に $k - \frac{1}{2}$ を代入すると

$$\cos k\theta = \frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}} - \frac{\sin\left(k - \frac{1}{2}\right)\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}}$$

となるので、和をとると

$$\sum_{k=1}^n \cos k\theta = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}} - \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \quad \dots\dots ④$$

このままだと微分が面倒なのでもうちょっと変形。

$$④の右辺 = \frac{\sin n\theta \cos \frac{\theta}{2} + \cos n\theta \sin \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2}} - \frac{1}{2}$$

$$= \sin n\theta \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2}} + \frac{\cos n\theta}{2} - \frac{1}{2}$$

よって

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\theta} \sum_{k=1}^n \cos k\theta \\ &= n \cos n\theta \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2}} - \sin n\theta \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\theta}{2}} - \frac{n \sin n\theta}{2} \end{aligned}$$

①から

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n k \sin k\theta \\ &= -n \cos n\theta \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2}} + \sin n\theta \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\theta}{2}} + \frac{n \sin n\theta}{2} \\ &= \frac{-n \cos n\theta \cos \frac{\theta}{2} + n \sin n\theta \sin \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2}} + \sin n\theta \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{-n \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}} + \frac{\sin n\theta}{4 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

どの形に整理するかのパリエーションはありますが、これが答えです。

§2. ラグランジュの三角恒等式

ちなみに、④は

$$\sum_{k=1}^n \sin k\theta = -\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} + \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}} \quad \dots\dots ⑤$$

とともに、ラグランジュの三角恒等式と呼ばれる式です。参考文献[1]を受けての話だったので、§1では、部分和数列を作ったラグランジュの三角恒等式の導出となりましたが、その縛りがなければ、オイラーの公式からでもすぐに導けます。

$$e^{ik\theta} = \cos k\theta + i \sin k\theta$$

$$\sum_{k=1}^n e^{ik\theta} = \sum_{k=1}^n (\cos k\theta + i \sin k\theta) \quad \dots\dots ⑥$$

θ が 2π の整数倍でないときは、 $e^{i\theta} \neq 1$ であるから、 θ が 2π の整数倍でないときに限って考えると

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \frac{e^{i\theta}(1-e^{in\theta})}{1-e^{i\theta}} \\ &= \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)(1-\cos n\theta - i\sin n\theta)}{1-\cos\theta - i\sin\theta} \quad \dots\dots ⑦ \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} &1 - \cos\varphi - i\sin\varphi \\ &= 2\sin^2\frac{\varphi}{2} - 2i\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} \\ &= 2\sin\frac{\varphi}{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)\right\} \\ &= 2\sin\frac{\varphi}{2} \cdot e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)} \end{aligned}$$

であるから、⑦は

$$\begin{aligned} &\frac{e^{i\theta} \cdot 2\sin\frac{n\theta}{2} \cdot e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{n\theta}{2}\right)}}{2\sin\frac{\theta}{2} \cdot e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}} \\ &= \frac{e^{i\theta} \cdot 2\sin\frac{n\theta}{2} \cdot e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{n\theta}{2}\right)} \cdot e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)}}{2\sin\frac{\theta}{2} \cdot e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)} \cdot e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)}} \\ &= \frac{\sin\frac{n\theta}{2} \cdot e^{-i\left[\pi-\frac{(n+1)\theta}{2}\right]}}{\sin\frac{\theta}{2} \cdot e^{-i\pi}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sin\frac{n\theta}{2} \cdot e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}}{\sin\frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{\sin\frac{n\theta}{2} \left\{ \cos\frac{(n+1)\theta}{2} + i\sin\frac{(n+1)\theta}{2} \right\}}{\sin\frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

つまり、⑥は

$$\begin{aligned} &\frac{\sin\frac{n\theta}{2} \left\{ \cos\frac{(n+1)\theta}{2} + i\sin\frac{(n+1)\theta}{2} \right\}}{\sin\frac{\theta}{2}} \\ &= \sum_{k=1}^n (\cos k\theta + i \sin k\theta) \end{aligned}$$

で、この実部、虚部をそれぞれとることにより

$$\sum_{k=1}^n \cos k\theta = \frac{\sin\frac{n\theta}{2} \cos\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \quad \dots\dots ⑧$$

$$\sum_{k=1}^n \sin k\theta = \frac{\sin\frac{n\theta}{2} \sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \quad \dots\dots ⑨$$

⑧、⑨の分子に、それぞれ積→和の公式を適用することにより、④、⑤を得る。(ラグランジュの三角恒等式は、⑧、⑨の形式で書かれることもある。)

§3. オイラーの公式

ところが、§2の手法を高校生に説明しようと思うと、オイラーの公式の説明から入らないといけない。

オイラーの公式を、どうやって高校生に説明するか。厳密にやろうと思うと、1冊の本が書けてしまうので、厳密な話は、参考文献[2]を読まれるとよいかと。

ここでは、多少のいい加減さには目をつぶり、2コマ程度の授業で、テイラー展開のイメージからオイラーの公式までについて、高校生が納得できる説明を書いていこうと思います。

§3-1. $y=e^x$ のテイラー展開のイメージ

この話題についてくる高校生ならば

$$f_n(x) = e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

としたときに、任意の自然数 n に対して

$$x > 0 \text{ においては } f_n(x) > 0,$$

$$f_n(0) = 0,$$

$$x < 0 \text{ においては}$$

$$n \text{ が偶数のときは } f_n(x) < 0,$$

$$n \text{ が奇数のときは } f_n(x) > 0$$

という補題 A は既知、あるいは、自分で証明できることを前提とする。

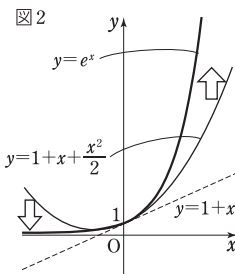
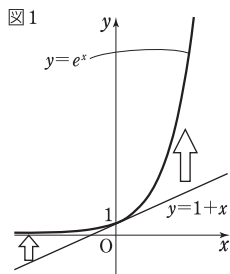
また、微分方程式 $f'(x) = f(x)$, $f(0) = 1$ を解くと、 $f(x) = e^x$ という補題 B も同様。

$f_n(x)$ の正負は、2つの関数

$$y = e^x, \quad y = g_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

のグラフの上下関係を表す。

$y = g_1(x) = 1 + x$ のグラフは、曲線 $y = e^x$ の、 $x = 0$ における接線を表す。(図 1)



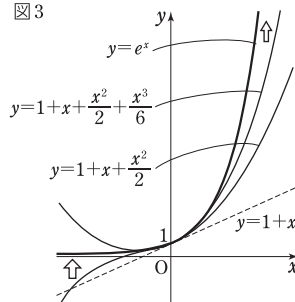
$y = g_1(x)$ のグラフは、常に曲線 $y = e^x$ より下にあるから、グラフを曲線 $y = e^x$ に近づけるためには、全体的に、グラフを上を持ち上げたい。つまり、常に正である、ある関数を加えると、グラフは、より曲線 $y = e^x$ に近づく。

そこで、関数 $y = g_1(x)$ に、常に正である関数 $y = \frac{x^2}{2}$ を加え、関数 $y = g_2(x)$ を作る。これで、グラフは $x \geq 0$ では曲線 $y = e^x$ に近づいたが、 $x < 0$ ではグラフを上を持ち上げ過ぎてしまうことになる。(図 2)

となると、次に、 $x > 0$ ではグラフをより上に持ち上げ、 $x < 0$ ではグラフを下に下ろすと、グラフは、より曲線 $y = e^x$ に近づく。

そこで、関数 $y = g_2(x)$ に、 $x > 0$ では正、 $x < 0$ では負となる関数 $y = \frac{x^3}{6}$ を加え、関数 $y = g_3(x)$ を作る。(図 3)

図 3



$y = g_3(x)$ のグラフは、常に曲線 $y = e^x$ より下にあるので、……以下繰り返す。

補題 A もあるので、関数 $y = g_n(x)$ のグラフは、 $x > 0$ においては、 n が大きくなればなるほど、下から曲線 $y = e^x$ に近づき、 $x < 0$ においては、 n が大きくなればなるほど、曲線 $y = e^x$ の上下をパタパタしながらも、この曲線に近づく。

ちょっと待て。 $x > 0$ での話は間違いない。しかし、 $x < 0$ で、曲線 $y = e^x$ の上下をパタパタするのは確かだが、本当に曲線 $y = e^x$ に近づくのか？

§3-2. $y=e^x$ のテイラー展開

そこで、このような関数を考える。

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$g_n'(x) = g_{n-1}(x)$ はすぐにわかるが、この式で、 $n \rightarrow \infty$ とすると、 $g'(x) = g(x)$ となる。

(この辺りが多少いい加減ですね。気になる方は「関数数列の一様収束性」について調べてみてください)

また、 $g(0) = 1$ であるから、補題 B より

$$g(x) = e^x$$

である。

§3-3. テイラー展開からオイラーの公式へ

同様に

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$c(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

とすると

$$s'(x) = c(x), c'(x) = -s(x), s(0) = 0, c(0) = 1$$

であり、ここから

$$s(x) = \sin x, c(x) = \cos x$$

であることが予想される。実際、それは正しい。

ここまでの話を、式3本にまとめると

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \quad \dots\dots ⑩$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\dots \quad \dots\dots ⑪$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\dots \quad \dots\dots ⑫$$

ここで、⑩に $x = i\theta$ を代入すると

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} \\ &\quad + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \frac{(i\theta)^7}{7!} + \dots\dots \\ &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - i\frac{\theta^7}{7!} + \dots\dots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots\dots\right) \\ &\quad + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots\dots\right) \end{aligned}$$

⑪、⑫と合わせると

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

よって、オイラーの公式を得る。

§4. ド・モアブルの定理／複素数の極形式

お気づきの方もいるとは思いますが、§2でオイラーの公式を使った部分は、実は、複素数の極形式、ド・モアブルの定理で十分事足ります。

意欲的な高校生には、オイラーの公式まで話してあげるとよいかと思いますが、そうでなくとも、複素数平面まで学んだ生徒であれば、ラグランジュの三角恒等式は証明できますし、§1の手法であれば、文系の生徒でも証明できます。

§5. 挑戦状の別解

§1で、ラグランジュの三角恒等式が導かれた後、数学Ⅲの微分の計算を用いていますが、では、文系の生徒にこの問題は解けないのか？

実は、微分を使わない解法もあります。

そのための手法もすべて、参考文献[1]に載っていますので、解答としてそちらを期待した方もおそらくいらっしゃるかと思います。

お待たせしました。ここからが、その解法です。

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^n k \sin k\theta \\ &= \sin \theta + 2\sin 2\theta + 3\sin 3\theta + \dots\dots + n \sin n\theta \\ &= \sin \theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \dots\dots + \sin n\theta \\ &\quad + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \dots\dots + \sin n\theta \\ &\quad + \sin 3\theta + \dots\dots + \sin n\theta \\ &\quad \vdots \\ &\quad \quad \quad + \sin n\theta \end{aligned}$$

この和の m 行目は $\sum_{k=m}^n \sin k\theta$

§1の②の両辺を $-2\sin \frac{\theta}{2}$ で割り、 k に $k - \frac{1}{2}$ を代入すると

$$\sin k\theta = -\frac{\cos\left(k + \frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin \frac{\theta}{2}} + \frac{\cos\left(k - \frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin \frac{\theta}{2}}$$

よって、 m 行目は

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n \sin k\theta &= \sum_{k=m}^n \left\{ -\frac{\cos\left(k + \frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin \frac{\theta}{2}} + \frac{\cos\left(k - \frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin \frac{\theta}{2}} \right\} \\ &= -\frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin \frac{\theta}{2}} + \frac{\cos\left(m - \frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin \frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

これを、1行目から n 行目まで足すので

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^n k \sin k\theta \\ &= \sum_{m=1}^n \left\{ -\frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin \frac{\theta}{2}} + \frac{\cos\left(m - \frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin \frac{\theta}{2}} \right\} \\ &= -\frac{n \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin \frac{\theta}{2}} + \frac{1}{2\sin \frac{\theta}{2}} \sum_{m=1}^n \cos\left(m - \frac{1}{2}\right)\theta \end{aligned}$$

③の両辺を $2\sin \frac{\theta}{2}$ で割り、 k に $m - 1$ を代入すると

$$\cos\left(m-\frac{1}{2}\right)\theta = \frac{\sin m\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} - \frac{\sin(m-1)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

よって

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n k \sin k\theta \\ &= -\frac{n \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}} \sum_{m=1}^n \left\{ \frac{\sin m\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} - \frac{\sin(m-1)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} \right\} \\ &= -\frac{n \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} + \frac{\sin n\theta}{4\sin^2\frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

微分なしでも解けました！

§6. 事の発端

同僚が、このようなネタを持ってきた。

$$\sum_{k=1}^n k \cos \frac{2k\pi}{n} \quad \dots\dots \textcircled{13} \text{ を求めよ。}$$

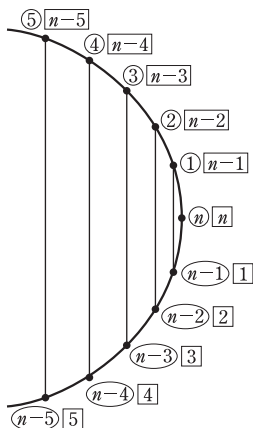
偏角は、単位円を n 等分した角。

単位円周上で、横軸に関して対称な点に対する、偏角における余弦の値は等しい、つまり

$$\cos\theta = \cos(2\pi - \theta)$$

$$\text{よって} \quad \cos \frac{2k\pi}{n} = \cos\left(2\pi - \frac{2k\pi}{n}\right)$$

ということは、 $\textcircled{13}$ では、単位円の点 $(1, 0)$ からスタートして、反時計回りに、 k 番目の偏角の余弦に、係数 k を掛けて和をとっているが(下図の○。この和を s_1 とする)、時計回りに k 番目の偏角の余弦に、係数 k を掛けて和をとっても同じ値になる。(下図の□。この和を s_2 とする)



○と□の和は、当然ながら n となる。例外は、 n 番目の点で、和が $2n$ となる。

つまり

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 &= \left(\sum_{k=1}^{n-1} n \cos \frac{2k\pi}{n} \right) + 2n \cos \frac{2n\pi}{n} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n-1} n \cos \frac{2k\pi}{n} \right) + n \cos \frac{2n\pi}{n} \\ &= \left(n \sum_{k=1}^n \cos \frac{2k\pi}{n} \right) + n \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n \cos \frac{2k\pi}{n} = 0$$

は、既出のラグランジュの三角恒等式④、⑧からも明らかであるから

$$s_1 + s_2 = n$$

また

$$s_1 = s_2$$

よって

$$s_1 = \frac{n}{2}$$

これは、答えもキレイだし、解法も面白いけれども、余弦ではなく正弦ではどうなる？偏角も、一般的な角度ではどうなる？と考えて、 $\sum_{k=1}^n k \sin k\theta$ はどうなるのか、という問題を思いつきました。

§7. おわりに

§5でも多少触れましたが、高校理系(数学Ⅲ)の問題に見える問題でも、工夫をすれば、文系生徒でも解ける問題がある。

面白いところでは、東京大学の2008年度前期理系の入試問題の第4問であり、問題は次の通りである。

放物線 $y=x^2$ 上に2点P, Qがある。線分PQの中点の y 座標を h とする。

- (1) 線分PQの長さ L と傾き m で、 h を表せ。
- (2) L を固定したとき、 h がとりうる値の最小値を求めよ。

[08 東京大・理系第4問]

理系だけに課された問題であるが、文言こそ違えど、類問が、1974年に東大の文理共通問題として出題されている。

理系の大学入試問題を、文系生徒が使える手法で解けないかを考えるのも興味深い。

ちなみに、古い話ではあるが、この2008年度入試の前後は、大学入試センターが過去の入試問題の再利用を解禁するかしないかの議論が行われた頃。

そういう時期に、東大の過去問題集に載っている問題を、東大が出題したということも味わい深い。

《参考文献》

- 〔1〕 武田眞史 著「数列の和～部分和数列という名称の提案～読者への挑戦状」数研通信 数学 No.111
- 〔2〕 吉田武 著「新装版オイラーの贈物 人類の至宝 $e^{i\pi} = -1$ を学ぶ」東海教育研究所 (2021)

(愛知県 海陽中等教育学校)