

大学の入学試験問題から見る 「ウォリスの公式」の証明

さわはた 澤幡
みちまさ 通正

§1. はじめに

大学の入学試験問題の中には、手前で問いかけを止めている問題が、時々見受けられる。高校生たちが、過去問を演習する際に、少し立ち止まってその内容を吟味してほしいという意図があるのかもしれない。

ここでは、1つの例として、いわゆる「ウォリスの公式」と言われる

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left\{ \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

を導いてみる。題材は、中央大学・理工学部 of 2024 年度入試で出題された問題の結果を、参考文献[1]の内容を活用して示してみる。

§2. 「ウォリスの公式」の導出

中央大学・理工学部の 2024 年度の入試問題の第 4 問では、次の問題が出題された。

【問題】 $n=1, 2, 3, \dots$ に対し、

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$ とおく。また、 $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx$ とする。

- (1) $(n+1)I_{n+1} = nI_{n-1}$ を示せ。
- (2) $nI_n I_{n-1}$ を求めよ。
- (3) $I_{n+1} < I_n$ を示せ。
- (4) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n^2$ を求めよ。

[24 中央大・理工学部第 4 問 改]

まず、上の【問題】に対して、簡潔に、【解説】を示しておく。

【解説】

$$(1) \quad I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin^n x \, dx$$

として、部分積分法を用いればよい。

- (2) (1)の結果の両辺に I_n を掛けると、数列 $\{nI_n I_{n-1}\}$ は初項 $I_1 I_0$ 、公比 1 の等比数列であることと、

$$I_0 = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = 1 \quad \text{であることから}$$

$$nI_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2}$$

- (3) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、 $0 \leq \sin x \leq 1$ であるから

$$0 \leq \sin^{n+1} x \leq \sin^n x$$

等号は常には成り立たないから $I_{n+1} < I_n$

- (4) (3)の結果より、 $0 < I_{n+1} < I_n < I_{n-1}$ であるから、この各辺に $nI_n (> 0)$ を掛けると

$$nI_n I_{n+1} < nI_n^2 < nI_n I_{n-1}$$

ここで、 $I_{n+1} = \frac{n}{n+1} I_{n-1}$ および(2)の結果を用い

ると

$$\frac{n}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2} < nI_n^2 < \frac{\pi}{2}$$

よって、はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n^2 = \frac{\pi}{2}$$

ここから、これらの結果を利用して、「ウォリスの公式」を導いてみる。

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \quad \text{において、(1)より、} I_{n+1} = \frac{n}{n+1} I_{n-1}$$

であるから

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} I_{2n-4} \\ &= \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-5}{2n-4} \cdots \frac{1}{2} I_0 \end{aligned}$$

ここで、 $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx = \left[x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$ であるから

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5) \cdots 3 \cdot 1}{2^n n!} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n)!}{2^n n! \cdot 2^n n!} \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

(4) より, $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n^2 = \frac{\pi}{2}$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n)I_{2n}^2 = \frac{\pi}{2}$$

が成り立つ。

$I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^n n! \cdot 2^n n!} \cdot \frac{\pi}{2}$ であるから, これを上の式に代入すると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n) \left\{ \frac{(2n)!}{2^n n! \cdot 2^n n!} \cdot \frac{\pi}{2} \right\}^2 = \frac{\pi}{2}$$

したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ \frac{(2n)!}{2^n n! \cdot 2^n n!} \right\}^2 = \frac{1}{\pi}$$

これより

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left\{ \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

が成り立つ。これで, 「ウォリスの公式」が導けたわけである。

最後に, 中央大学・理工学部 of 2024 年度の入試問題の第4問の派生問題として, 数列 $\{I_n\}$ について, 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{I_{n-1}}$ はどうなるのかを, 次のような対話の形で示すことにしよう。

§3. 課題

ある日の放課後に, 教室で, 花子さんと太郎さんは, 授業で扱った【問題】から派生した, 次の【課題】について話している。

【課題】 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{I_{n-1}}$ を求めよ。

[24 中央大・理工学部第4問派生問題]

花子: これが, 例えば $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n-2}}$ の極限ならば, すぐに答えがわかるの。

太郎: 偶数番目の項と, それより1つ前の偶数番目の項の比の極限だね。

花子: §2 から, $I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^n n! \cdot 2^n n!} \cdot \frac{\pi}{2}$ となること
がわかっている。これを使えば

$$\begin{aligned} I_{2n-2} &= \frac{(2n-2)!}{2^{n-1} (n-1)! \cdot 2^{n-1} (n-1)!} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{4n^2 (2n)!}{2n (2n-1) \cdot 2^n n! \cdot 2^n n!} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{4n^2}{2n (2n-1)} I_{2n} \end{aligned}$$

と変形できる。

太郎: なるほど。すると

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n-2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n(2n-1)}{4n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{2} = 1 \end{aligned}$$

だね。

花子: この課題は, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n-2}} = 1$ であることを利用しても, 極限を求めることはできそう。でも, これを利用しなくても, 数列 $\left\{ \frac{I_n}{I_{n-1}} \right\}$ の極限を調べられないかな。

太郎: 極限がわからないならば, 「はさみうちの原理」が使えるように, 式を変形するのだろうね。

花子: なるほど。(3)の結果より,

$0 < I_{n+1} < I_n < I_{n-1}$ であるから, これに

$I_{n+1} = \frac{n}{n+1} I_{n-1}$ を代入してみると

$$\frac{n}{n+1} I_{n-1} < I_n < I_{n-1}$$

その上で, 各辺を $I_{n-1} (>0)$ で割ると

$$\frac{n}{n+1} < \frac{I_n}{I_{n-1}} < 1$$

太郎: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$ である

から, はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{I_{n-1}} = 1$$

と求まるね。

花子: 隣同士の項の比の極限も, 最初に求めた極限と同じ値に収束するのね。

《参考文献》

- [1] 「数学Ⅲ」数研出版(2023)
- [2] 「2024 新課程数学の構成 数学Ⅲ・C〔複素数平面, 式と曲線〕入試問題集」数研出版(2024)

(茨城県 水戸葵陵高等学校)