「近ごろ日が短く(長く)なったねぇ」を証明(説明？)する
～人間の感覚に潜む微分～

沢畑(さわはた)　雅彦(まさひこ)

§1. はじめに

お彼岸が近づいてくると，耳にするようになるのが「暑さ寒さも彼岸まで」という言葉である。この言葉があるからであろう，「今年はお彼岸を過ぎてもなかなか涼しくなりません」のような，気温に関する話題が多く登場する。

気温は，私たちの日常生活に，大きな影響を与えるものである。例えば，私たちは，天気予報でその日の気温を確認し，服装などを決めている。このため，毎日のように，気温を意識していると言ってもよいだろう。天気予報では「平年より何度高い」や「昨年より何度低い」などと，比較まで行ってくれる。

一方，春分・秋分の頃になると「近ごろ日が短く(長く)なったねぇ」というような，昼間の長さの変化に関する会話も多くなる。昼間の長さに関しては，年によって少しの差は出るものの，何月何日の昼間の長さは何時間何分何秒であると，天文学的に計算できる。このように，昼間の長さは確定している情報であるため，予報の対象とはならず，気温と比べて，あまり話題にならないと思う。

「暑い・寒い」や「昼間の長さが長い・短い」は，どちらも私たちの感覚である。気温に関しては，例年や前年との比較ができるので，その感覚が正しいかどうかを確かめることができる。しかし，昼間の長さは，同じ時期であれば，毎年ほぼ同じである。では，この「近ごろ日が短く(長く)なったと感じる」という，私たちのもつ感覚は，正しいと言えるのであろうか。そこで，今回は，その感覚を三角関数の微分を使って証明(説明？)したい。

§2. 背景

もともとの着想は，以前に勤務していた学校で行われていたアメリカ研修において，季節について話題になったときのことである。その研修の柱の1つ天文学研修が，アメリカのある大学で実施された。

天文学研修とは書いたが，最先端の天文学を学ぶ研修ではない。レベル的には，日本の義務教育と同等のものである。しかし，同じ分野でも，アメリカと日本では，扱っている内容や教え方に違いがあった。さらに，この研修は，すべて英語で行われるため，研修を受けた生徒にとっては，決して楽なものではなかった。一応，引率者の中に，英語の教員はいたが，理科に精通している訳ではなかったため，通訳ではなく，理解し難い部分の補足だけを担ってくれていた。数学の教員である筆者も，生徒に混じってその研修に参加したが，内容の理解度においては，生徒とそれほど変わらなかった。そのときの研修内容は，太陽系に関するものであった。太陽と地球との距離と，太陽の大きさの比較について，教室全体を使って学ぶという内容であり，私たちがよく見る太陽系が，いかにデフォルメされたものであるかを体感することが出来た。

やがて，研修は，季節に関する話となっていった。アメリカの講師から「日本には季節がいくつあるのか？」と聞かれた。生徒は，もちろん「4つ」と答えた。しかし，筆者が「古い日本の暦では24の季節がある」と言うと，より詳しい説明を求められた。余計なことを言わなければよかったと思いつつ，拙い英語で「立春は2月の初めにあり，春の始まりのこと」と説明した。すると，アメリカの講師たちは，大変驚いていた。研修が行われた大学の周辺では，

2 月の初めはまだ寒く，季節は冬だというのだ。彼らの中では，春は，春分から始まるそうだ。つまり，春分から夏至までが春，夏至から秋分までが夏，秋分から冬至までが秋，冬至から春分までが冬ということだった。確かに，感覚的には，そちらの方が合っている気がした。ただし，日本の四字熟語に「用意周到」という言葉があるように「前もって準備をしておくということは，大切なことである」という考え方が，本来，まだ春と呼ぶのには少し早い時期を「春」と認める起因になっているのかもしれない。

その後，研修は，黄道についての説明になった。詳しい説明は覚えていないが，地球が太陽の周りを回っており，地球が太陽の周りを公転する際の軌道の平面に対して，地軸が傾いているため，黄道は正弦曲線(サインカーブ)を描く。これについては，数学を専門とする筆者は，容易に想像ができた。筆者は，何となく「ということは，微分をするとコサインになるのね」と思いながら，話を聞いていた。そのときは，それが何を意味するかまでは思い至らなかったが。

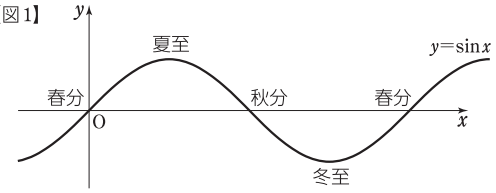
§3. 微分法を用いた考察

さて，今回話題にしたいのは「近ごろ日が短く(長く)なったねぇ」という言葉である。つまり，昼間の長さがポイントとなるが，ほとんどの人が，それを感じるのは「日没時間の変化」だと思う。そうなると，話は少し違ってくる。なぜならば，1 年のうちで日没の時間が最も早いのは，残念ながら冬至ではないからだ。地球の公転軌道が，円ではなく楕円であることや，地軸の傾きなどが原因であり，いわゆる「冬至10 日前」ごろが，実際には，日没時間が最も早くなる。こうなってくると話が進まなくなるので，今回は，日没の時間が最も早いのは冬至，最も遅いのは夏至とし，昼間の長さを表すグラフの数学モデルを，正弦曲線と仮定して，話を進めさせていただく。

昼間の長さのグラフを正弦曲線に当てはめ，横軸に日付，縦軸に昼間の長さをとる。ここで，この数学モデルを理解しやすくするため，春分の日の昼間の長さを 0 とし，夏至の日と春分の日の昼間の長さの差を 1，冬至の日と春分の日の昼間の長さの差を −1 とした。そうすると，各日と春分の日の昼間の長さの差を表す【図1】のようなグラフがかける。春分の日からスタートしたグラフは，まず増加をし，夏至で最大となる。そこからは，減少に転じ，秋分の日に再び 0 となる。この 0 は，昼間の時間が全くないという意味の 0 ではなく，春分の日と秋分の日の昼間の長さに差がない，つまり「昼間の長さが同じ」という意味である。また，ここから，値は負になるが，これは「春分の日の昼間の長さより短くなる」という意味であることに注意しておきたい。そして，グラフは，冬至で最小となり，再び増加に転じ，春分に到達する。つまり，1 年を周期とするサインカーブ($y=\sin x$)が完成する。

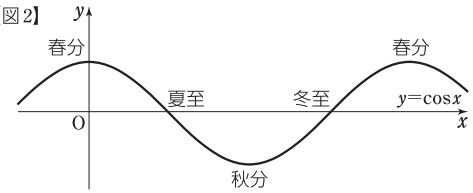
やっと準備ができたので，この昼間の長さを表す関数 $y=\sin x$ を微分する。三角関数の導関数の証明は教科書等にお任せし，結果だけを用いることとする。もちろん，$y=\sin x$ を微分すると，$y=\cos x$ となる。

【図1】



そして，微分法を用いることにより新しくできた関数 $y=\cos x$ のグラフが【図2】である。このグラフの，特徴的な部分を見てみる。まず，この関数は，始点となる春分で最大値 1 をとり，夏至で 0 をとり，秋分で最小値 −1 をとり，冬至で再び 0 をとる。そして，最大値をとる春分に戻る。このグラフは，何を意味するのであろうか。

【図2】



ここで，微分の定義について確認しよう。感覚的な理解にはなるが，ある区間における「平均変化率」の極限値を「微分係数」と名付けた。微分係数を各値で求めるのは効率が悪いため，ある点の値を代入すると，その点における微分係数が求まる関数を「導関数」と呼び，導関数を求めることを「微分する」と言うことにした。これが微分の定義である。つまり，微分した関数によって求められる値は，その点における「瞬間の変化率」を示していることになる。

つまり，「春分で最大値1をとる」ということは，春分において，昼間の時間が長くなる割合が最も大きくなることを示している。また，「秋分で最小値−1をとる」ということは，秋分において，昼間の時間が長くなる割合が最も小さくなることを示している。ここは，なかなか伝わりづらい。値がマイナスとなることを考慮して言い換えれば，秋分において，昼間の時間が短くなる割合が最も大きくなることを示しているのだ。つまり，春分・秋分の前後が，一年のうちで，昼間の時間の長さの変化が最も大きいと言える。ちなみに，夏至や冬至で値が0になるということは，この時期の昼間の長さは，前後の日と比べてほとんど差がないことを示している。

さて，話を元に戻してみよう。春分や秋分に近づけば近づくほど，微分した関数の値の絶対値が大きくなる。つまり，その前後の昼間の長さと比較すると，その変化の割合が1年の中で最大となる。結果として，春分・秋分の頃に行われる「近ごろ日が短く(長く)なったねぇ」という会話は，感覚的なものだけではなく，確かに合っていることが，数学的に証明されたと言えるのではないだろうか。

§4. おわりに

三角関数の導関数は，数学Ⅲを履修しないと登場しない。数学Ⅲは，履修をしない高校生も存在しており，理解し難い分野かもしれない。実際に，三角関数の導関数が頻繁に登場するのは，数学の他では，物理学や工学などの理系分野が主である。しかし，実際には，私たちの身近なところにも潜んでいるのである。

私たちが気づかないだけで，私たちの身近なところに，もっと難しくも楽しい数学が潜んでいるかもしれない。そう思うと「もっと数学を勉強しなきゃ」とワクワクしないだろうか？

(茨城県立多賀高等学校)