

チェバ・メネラウスの定理を用いる問題の 分かりやすい解き方

うすい たつや
臼井 達哉

§1. 最初に

図は省略するが、チェバの定理とメネラウスの定理は、どちらも、次のような式で表される。

$$\frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} = 1$$

一方、この式に対応する図は、少なくとも6種類ある(図3～図8)。与えられた問題から、該当する定理と図を、正しく判断することは難しい。また、図によって、式を作る難しさが異なる。例えば、チェバの定理では、図3が最も易しい。

定理を用いるときに、2つの難しさがある。問題を提示するときには必要であるが、問題を解くときには邪魔になる線分や点がある。これが、第一の難しさである。しかし、その線分や点を取り去って、図を簡単にしても、そこから式を作るのはやはり難しい。これが、第二の難しさである。

この2つの難しさを解消する方法がまとまったので、報告する。第一の難しさについては、問題の解説で扱う。まず、第二の難しさを解消するために、定理は後回しにして、1つの線分から始める。また、説明の中で、生徒に提示した【練習】も紹介する。

§2. SK 線分

説明の都合上、いくつかの言葉を定義するが、これらを用いなくても、授業は可能である。

1つの線分の両端の点と、それ以外の1点の計3点を考える。この3点を任意の順で選び、それぞれ始点、経由点、終点とする。点の決め方は、図1で示したものを含めて6通りある。線分上で、始点→経由点→終点という移動を考える。

始点・経由点・終点をもつ線分をSK線分とする。SK線分において、始点から経由点までの距離を経由点から終点までの距離で割った値を、SK線分の線分比とする。

図1の線分比は $\frac{5}{3}$ である。

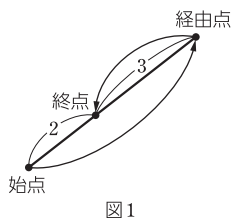
始点・終点・経由点が変われば、線分比は変わる。

これらを変えたとき、図1

の線分比の値は $\frac{5}{3}, \frac{3}{5},$

$\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{2}{5}$ の6通りある。

【練習1】 1つのSK線分で6種類の移動をかき、それぞれの線分比を求める。



§3. 2つのSK線分

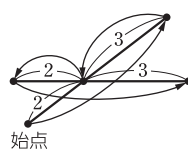
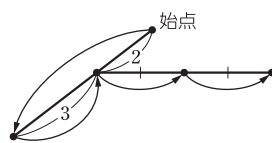
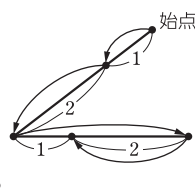
1つのSK線分の終点に、もう1つのSK線分の始点を重ねて、2つをつなぐ。例えば、右の図

のようなつなぎ方がある。2つの線分にまたがる移動に対して、2つの線分比の積を計算する。右の図の移動の場合、線分比の積は、上の図から順に

$\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}, \frac{5}{3} \times \frac{1}{1}, \frac{5}{3} \times \frac{2}{5}$

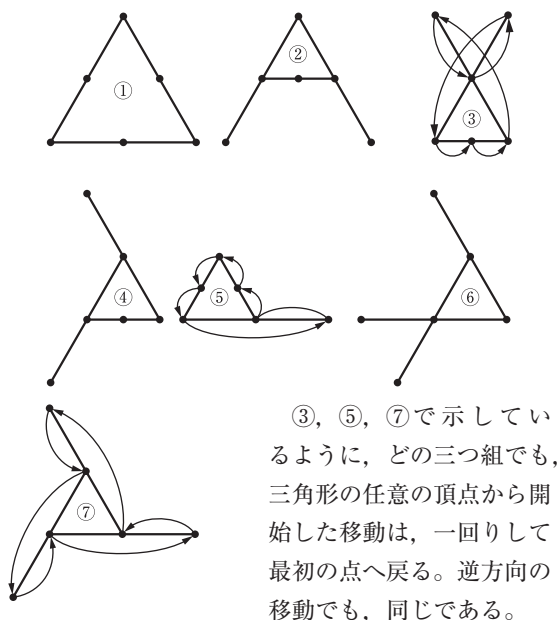
である。

【練習2】 2つのSK線分と与えられた移動について、線分比の積を書く練習をする。



§4. 三つ組

同様に、3つ目のSK線分をつなぐことができる。3つ目のSK線分の終点を、最初の線分の始点と重ねると、三角形を含む図ができる。このような図形を、SK線分の三つ組とする。経由点と三角形の位置関係で区別すると、三つ組は、次の7種類になる。



上の図では、各SK線分上の3点は等間隔であるから、三角形の左下の頂点から反時計回りに1周したときの、③, ⑤, ⑦の線分比の積はそれぞれ

$$\frac{1}{1} \times \frac{2}{1} \times \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{1} \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{1}, \quad \frac{2}{1} \times \frac{2}{1} \times \frac{2}{1}$$

【練習3】 与えられた三つ組に移動をかき、線分比の積を書く。

2つの定理を学ぶ前に、三つ組で、線分比の積を書く練習をしておく。これが、第二の困難を解消する方法である。

§5. メネラウスの定理・チェバの定理

チェバの定理とメネラウスの定理の説明を行う。SK線分を用いた定理の表現を、次に示す。授業で、この表現を用いる必要はない。

SK線分の三つ組において、三角形の頂点を S_1, S_2, S_3 とする。 S_2 と S_3 , S_3 と S_1 , S_1 と S_2 を含む線分上の経由点をそれぞれ K_1, K_2, K_3 とする。

3つのSK線分の線分比の積

$$\alpha = \frac{S_2K_1}{K_1S_3} \times \frac{S_3K_2}{K_2S_1} \times \frac{S_1K_3}{K_3S_2}$$

について、次のことが成り立つ。

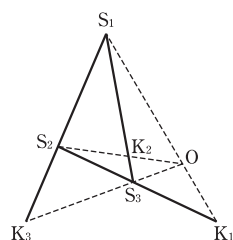
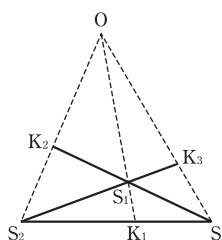
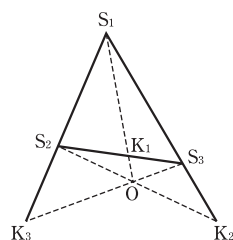
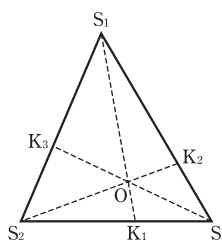
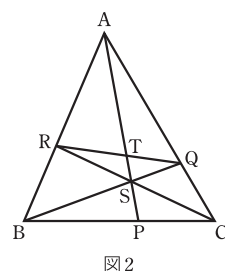
チェバの定理

3直線 S_1K_1, S_2K_2, S_3K_3 が1点で交わる時 $\alpha = 1$ が成り立つ。

メネラウスの定理

3点 K_1, K_2, K_3 が一直線上にあるとき $\alpha = 1$ が成り立つ。

定理の条件を満たす三つ組は、図3～図8の実線部分である。これらは、右の図2から、余分な線分と点を取り除くことによって得られる。



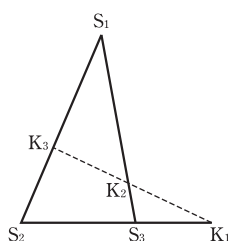


図7

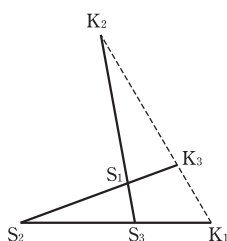


図8

【練習4】 図3～図8の3つの線分のうち2つに比を与え、定理を用いてもう1つの線分比を求める。

§6. 不要な線分と点を消す

図3～図8では、点線と点Oが、第一の難しさの原因となる。2つの定理を用いる問題では、図2と類似の図形で示されることが多い。このような問題において、次の手順で、邪魔な線分と点を消す。

1. 与えられた比を2つの線分には書き込み、比を求める線分と合わせて3つの線分を確認する。
2. 3つの線分で囲まれた三角形を塗りつぶし、不要な線分と点を消す。

以上の手順で、三つ組が得られる。実際には、印刷された図で、必要な部分を強調することによって、不要な部分を無視する。

【例題1】 右の図の

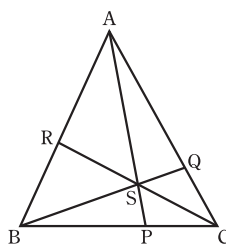
△ABCにおいて、

$AR:RB=4:3$,

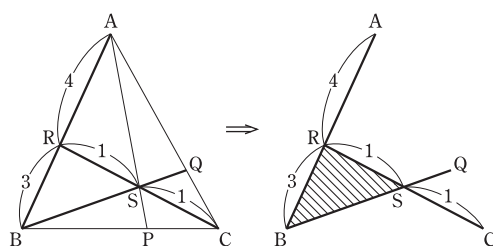
$RS:SC=1:1$

である。

$BS:SQ$ を求めよ。



不要な線分と点を消す過程を、次の図で示す。左の図が手順1、右の図が手順2の結果である。



これで、三つ組が得られる。上の図で、移動をたどりながら、次の式を書く。記述式解答でなければ、最初の等式は省くことができる。

$$\left(\frac{BQ}{QS} \times \frac{SC}{CR} \times \frac{RA}{AB} = 1\right)$$

$$\frac{BQ}{QS} \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{7} = 1$$

$$\frac{BQ}{QS} = \frac{7}{2}$$

よって $BS:SQ=5:2$

【例題2】 右の図の

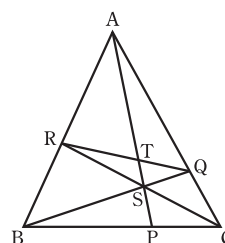
△ABCにおいて、

$AR:RB=4:3$,

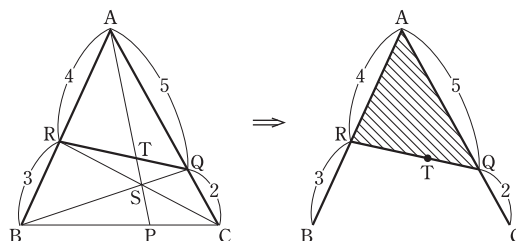
$AQ:QC=5:2$

である。

$RT:TQ$ を求めよ。



図と式を示す。



$$\left(\frac{RT}{TQ} \times \frac{QC}{CA} \times \frac{AB}{BR} = 1\right)$$

$$\frac{RT}{TQ} \times \frac{2}{7} \times \frac{7}{3} = 1$$

$$\frac{RT}{TQ} = \frac{3}{2}$$

よって $RT:TQ=3:2$

【練習5】 【例題1】、【例題2】の類題。

この練習では、余分な線分と点を取り除く練習のため、問題提示は、図2 またはそこから線分 RQ を除いた図形で行う。

§7. まとめ

三つ組を用いる方法では、問題を解く過程を、次の2段階に分ける。

1. 問題に示された図から、余分な線分と点を取り除き三つ組を作る。
2. 三つ組から線分比の積 α を作り、 $\alpha=1$ から解答を求める。

【例題1】はメネラウスの定理、【例題2】はチェバの定理を用いているが、解答からわかるように、この方法では、用いる定理を意識することなく、問題を解くことができる。

記述式解答では「～の定理により」と書く必要がある。その場合、用いる定理の判断は、次のように行う。三つ組において、三角形の頂点以外の3点(経由点)が一直線上にあればメネラウスの定理、そうでなければチェバの定理である。これは、図から簡単に判断できる。

§8. 授業実践と成果

§2 から §6 まで説明する中で、【練習1】～【練習3】は、板書により問題を提示して、授業中に解く時間を設けた。【練習4】・【練習5】は、以下の12問を課題とした。

(1)～(6)は、図3～図8において、3つの線分のうち2つに比を与え、もう1つの線分比を求める問題である。(7)～(12)の問題は、次の通りである。

ただし、図10において、与えられた線分の比と図の線分の長さの対応は正確ではない。

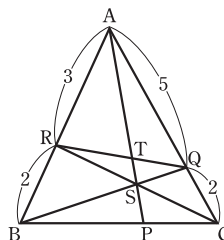


図9

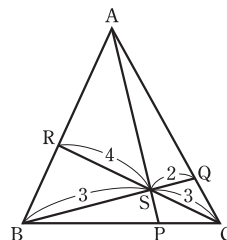


図10

図9において次の比を求めよ。

- (7) $BS : SQ$ (8) $RS : SC$ (9) $RT : TQ$

図10において次の比を求めよ。

- (10) $BP : PC$ (11) $AR : RB$ (12) $AQ : QC$

課題は自己採点であったため、テスト形式に比べると精度は落ちるが、全12問について、正解率にあまり差はなかった。また、授業中に生徒に聞いたところ、問題による難易度の差をあまり感じなかった生徒が多数であった。このことから、今回の方法は、効果があったと考えられる。また、私自身も、この方法によって、以前よりも図に惑わされずに問題が解けるようになった。

(岐阜県立長良高等学校)