異なる n 個のさいころを同時に投げたとき，目の和が k 以下になる場合の数

竹内（たけうち）　憲治（けんじ）

§1．はじめに

【問題1】 異なる5個のさいころを同時に投げたとき，目の和が10以下になる場合は何通りあるか。

さいころの個数や目の和に違いはあれど，これに類する問題について，これまで多くの生徒から質問を受けた。筆者から生徒への回答(解答)は，およそ次の2つであった。

【解答】その1 （重複組合せの利用）

異なる5個のさいころの目をそれぞれ x_1，x_2，x_3，x_4，x_5 とするとき，不等式

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 \leqq 10 \quad (1 \leqq x_i \leqq 6)$$

を満たす整数解 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)$ の個数を求めればよい。$1 \leqq x_i \leqq 6$ であるが，いずれの x_i も $x_i \geqq 7$ にはならないから，$x_i \geqq 1$ でよい。

例えば，目の和がちょうど10になるのは

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=10 \quad (x_i \geqq 1)$$

のときである。ここで，$x_i-1=X_i$ とおくと

$$X_1+X_2+X_3+X_4+X_5=5 \quad (X_i \geqq 0)$$

であるから，目の和がちょうど10になる組合せの総数は ${}_5\mathrm{H}_5$ 通りである。同様に考えると

（目の和が10以下）

$=$(和5)$+$(和6)$+\cdots\cdots+$(和10)

$={}_5\mathrm{H}_0+{}_5\mathrm{H}_1+\cdots\cdots+{}_5\mathrm{H}_5={}_6\mathrm{H}_5$

$({}_{m+1}\mathrm{H}_n={}_m\mathrm{H}_0+{}_m\mathrm{H}_1+\cdots\cdots+{}_m\mathrm{H}_n$ ……① より)

$={}_{10}\mathrm{C}_5=252$（通り）　答

等式①について，左辺は異なる $(m+1)$ 種類の果物から重複を許して n 個を選ぶ方法の総数に等しい。これを特定の果物(例えばリンゴ)に着目すると

リンゴ0個：リンゴを除く異なる m 種類の果物から n 個を選ぶ方法の総数は ${}_m\mathrm{H}_n$ 通り

リンゴ1個：リンゴを除く異なる m 種類の果物から $(n-1)$ 個を選ぶ方法の総数は ${}_m\mathrm{H}_{n-1}$ 通り

……

リンゴ n 個：リンゴを除く異なる m 種類の果物から0個を選ぶ仕方は ${}_m\mathrm{H}_0$ 通り

であるから，和の法則により，等式①は成立する。

【解答】その2 （形式的べき級数の利用）

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=k \quad (1 \leqq x_i \leqq 6) \qquad \cdots\cdots ②$$

を満たす整数解 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)$ の個数は

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^5 \qquad \cdots\cdots ③$$

の展開式における，x^k の係数に等しい。形式的べき級数を利用して

$$③=\left\{\frac{x(1-x^6)}{1-x}\right\}^5=x^5(1-x^6)^5\times\frac{1}{(1-x)^5}$$

$$=x^5(1-5x^6+10x^{12}-10x^{18}+5x^{24}-x^{30})$$

$$\times({}_5\mathrm{H}_0+{}_5\mathrm{H}_1x+{}_5\mathrm{H}_2x^2+\cdots\cdots) \qquad \cdots\cdots ③'$$

よって，②で $k=5,\ 6,\ \cdots\cdots,\ 10$ となる組合せの総数は，③′の x^5，x^6，……，x^{10} の係数に等しい。ゆえに

${}_5\mathrm{H}_0+{}_5\mathrm{H}_1+\cdots\cdots+{}_5\mathrm{H}_5$

$={}_6\mathrm{H}_5={}_{10}\mathrm{C}_5=252$（通り）　答

§2．考察

紹介した2つの**【解答】**の特徴はそれぞれ

【解答】その1

わかりやすい解答ではあるが，**【問題1】**で目の和を，例えば17以下にすると，途端に解答できない。

【解答】その2

形式的べき級数はやや難しいが，目の和が17以下でも解答できるうえ，一般化にも向いている。

このことから，生徒への回答は，形式的べき級数の利用に軍配が上がりそうだ。もしも，目の和が17以下だとしたら，どうなるだろうか。

> **【問題2】** 異なる5個のさいころを同時に投げたとき，目の和が17以下になる場合は何通りあるか。

目の和が10以下から17以下になるだけで，**【解答】その1**では難しくなる。なぜならば

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 \leqq 17$$

を満たす整数解には，(10，1，1，1，1)や(7，7，1，1，1)のように，条件 $1 \leqq x_i \leqq 6$ を満たさないものがあるからだ。

目の和を変えただけなのに一体全体どうなっているのかを，形式的べき級数を用いて考察しよう。

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=k \quad (1 \leqq x_i \leqq 6) \qquad \cdots\cdots ②$$

において，k の値として可能な $5 \leqq k \leqq 30$ で考える。これを満たす整数解 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)$ の個数は

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^5 \qquad \cdots\cdots ③$$

の展開式における，x^k の係数に等しい。

$$③=x^5(1-x^6)^5 \times \frac{1}{(1-x)^5}$$
$$=x^5(1-5x^6+10x^{12}-10x^{18}+5x^{24}-x^{30})$$
$$\times({}_5\mathrm{H}_0+{}_5\mathrm{H}_1 x+{}_5\mathrm{H}_2 x^2+\cdots\cdots) \qquad \cdots\cdots ③'$$

であるから，$5 \leqq k \leqq 30$ に対して x^k の係数を調べると，**<表1>**のようになる。

<表1>

$k=5$：${}_5\mathrm{H}_0$
$k=6$：${}_5\mathrm{H}_1$
$k=7$：${}_5\mathrm{H}_2$
$k=8$：${}_5\mathrm{H}_3$
$k=9$：${}_5\mathrm{H}_4$
$k=10$：${}_5\mathrm{H}_5$
$k=11$：${}_5\mathrm{H}_6-5\times{}_5\mathrm{H}_0$
$k=12$：${}_5\mathrm{H}_7-5\times{}_5\mathrm{H}_1$
$k=13$：${}_5\mathrm{H}_8-5\times{}_5\mathrm{H}_2$
$k=14$：${}_5\mathrm{H}_9-5\times{}_5\mathrm{H}_3$
$k=15$：${}_5\mathrm{H}_{10}-5\times{}_5\mathrm{H}_4$
$k=16$：${}_5\mathrm{H}_{11}-5\times{}_5\mathrm{H}_5$
$k=17$：${}_5\mathrm{H}_{12}-5\times{}_5\mathrm{H}_6+10\times{}_5\mathrm{H}_0$
$k=18$：${}_5\mathrm{H}_{13}-5\times{}_5\mathrm{H}_7+10\times{}_5\mathrm{H}_1$
$k=19$：${}_5\mathrm{H}_{14}-5\times{}_5\mathrm{H}_8+10\times{}_5\mathrm{H}_2$
$k=20$：${}_5\mathrm{H}_{15}-5\times{}_5\mathrm{H}_9+10\times{}_5\mathrm{H}_3$
$k=21$：${}_5\mathrm{H}_{16}-5\times{}_5\mathrm{H}_{10}+10\times{}_5\mathrm{H}_4$
$k=22$：${}_5\mathrm{H}_{17}-5\times{}_5\mathrm{H}_{11}+10\times{}_5\mathrm{H}_5$
$k=23$：${}_5\mathrm{H}_{18}-5\times{}_5\mathrm{H}_{12}+10\times{}_5\mathrm{H}_6-10\times{}_5\mathrm{H}_0$
$k=24$：${}_5\mathrm{H}_{19}-5\times{}_5\mathrm{H}_{13}+10\times{}_5\mathrm{H}_7-10\times{}_5\mathrm{H}_1$
$k=25$：${}_5\mathrm{H}_{20}-5\times{}_5\mathrm{H}_{14}+10\times{}_5\mathrm{H}_8-10\times{}_5\mathrm{H}_2$
$k=26$：${}_5\mathrm{H}_{21}-5\times{}_5\mathrm{H}_{15}+10\times{}_5\mathrm{H}_9-10\times{}_5\mathrm{H}_3$
$k=27$：${}_5\mathrm{H}_{22}-5\times{}_5\mathrm{H}_{16}+10\times{}_5\mathrm{H}_{10}-10\times{}_5\mathrm{H}_4$
$k=28$：${}_5\mathrm{H}_{23}-5\times{}_5\mathrm{H}_{17}+10\times{}_5\mathrm{H}_{11}-10\times{}_5\mathrm{H}_5$
$k=29$：${}_5\mathrm{H}_{24}-5\times{}_5\mathrm{H}_{18}+10\times{}_5\mathrm{H}_{12}-10\times{}_5\mathrm{H}_6+5\times{}_5\mathrm{H}_0$
$k=30$：${}_5\mathrm{H}_{25}-5\times{}_5\mathrm{H}_{19}+10\times{}_5\mathrm{H}_{13}-10\times{}_5\mathrm{H}_7+5\times{}_5\mathrm{H}_1$

この表から，**【問題2】**の解答は

【解答】

(目の和が17以下)
$=$(和5)$+$(和6)$+\cdots\cdots+$(和17)
$=({}_5\mathrm{H}_0+{}_5\mathrm{H}_1+\cdots\cdots+{}_5\mathrm{H}_{12})$
$\qquad -5\times({}_5\mathrm{H}_0+{}_5\mathrm{H}_1+\cdots\cdots+{}_5\mathrm{H}_6)+10\times{}_5\mathrm{H}_0$
$={}_6\mathrm{H}_{12}-5\times{}_6\mathrm{H}_6+10\times{}_5\mathrm{H}_0$ (等式①より)
$=6188-5\times462+10\times1=3888$(通り) 答

である。

また，この解法を一般化すれば

(目の和が k 以下)
$=$(和5)$+$(和6)$+\cdots\cdots+$(和 k)
$={}_6\mathrm{H}_{k-5}-5\times{}_6\mathrm{H}_{k-11}+10\times{}_6\mathrm{H}_{k-17}$
$\qquad -10\times{}_6\mathrm{H}_{k-23}+5\times{}_6\mathrm{H}_{k-29}-{}_6\mathrm{H}_{k-35}$
$={}_k\mathrm{C}_5-5\times{}_{k-6}\mathrm{C}_5+10\times{}_{k-12}\mathrm{C}_5$
$\qquad -10\times{}_{k-18}\mathrm{C}_5+5\times{}_{k-24}\mathrm{C}_5-{}_{k-30}\mathrm{C}_5$
$=(1,\ -5,\ 10,\ -10,\ 5,\ -1)$
$\cdot({}_k\mathrm{C}_5,\ {}_{k-6}\mathrm{C}_5,\ {}_{k-12}\mathrm{C}_5,\ {}_{k-18}\mathrm{C}_5,\ {}_{k-24}\mathrm{C}_5,\ {}_{k-30}\mathrm{C}_5)$

が成り立つ。ただし，記号「・」は内積を表す。k の値の範囲について気にしないで一般化を行った。また，末尾の ${}_{k-30}\mathrm{C}_5$ は，$5 \leqq k \leqq 30$ のときは常に0になる。

さらに，**<表1>**から

(目の和がぴったり k)
$={}_5\mathrm{H}_{k-5}-5\times{}_5\mathrm{H}_{k-11}+10\times{}_5\mathrm{H}_{k-17}$
$\qquad -10\times{}_5\mathrm{H}_{k-23}+5\times{}_5\mathrm{H}_{k-29}-{}_5\mathrm{H}_{k-35}$
$={}_{k-1}\mathrm{C}_4-5\times{}_{k-7}\mathrm{C}_4+10\times{}_{k-13}\mathrm{C}_4$
$\qquad -10\times{}_{k-19}\mathrm{C}_4+5\times{}_{k-25}\mathrm{C}_4-{}_{k-31}\mathrm{C}_4$
$=(1,\ -5,\ 10,\ -10,\ 5,\ -1)$
$\cdot({}_{k-1}\mathrm{C}_4,\ {}_{k-7}\mathrm{C}_4,\ {}_{k-13}\mathrm{C}_4,\ {}_{k-19}\mathrm{C}_4,\ {}_{k-25}\mathrm{C}_4,\ {}_{k-31}\mathrm{C}_4)$

も得られる。まとめると

【公式Ⅰ】

異なる5個のさいころを同時に投げたとき

(1)　目の和が k 以下になる組合せの総数は

$(1,\ -5,\ 10,\ -10,\ 5,\ -1)$

$\cdot({}_kC_5,\ {}_{k-6}C_5,\ {}_{k-12}C_5,\ {}_{k-18}C_5,\ {}_{k-24}C_5,\ {}_{k-30}C_5)$ 通り

(2)　目の和がぴったり k になる組合せの総数は

$(1,\ -5,\ 10,\ -10,\ 5,\ -1)$

$\cdot({}_{k-1}C_4,\ {}_{k-7}C_4,\ {}_{k-13}C_4,\ {}_{k-19}C_4,\ {}_{k-25}C_4,\ {}_{k-31}C_4)$ 通り

ただし，$n<r$ のとき　${}_nC_r=0$

等式③′の中に

$(1-x^6)^5$

$=1-5x^6+10x^{12}-10x^{18}+5x^{24}-x^{30}$

$=(1,\ -5,\ 10,\ -10,\ 5,\ -1)$

$\cdot(x^0,\ x^6,\ x^{12},\ x^{18},\ x^{24},\ x^{30})$

があり，これと**【公式Ⅰ(1)】**の成分や添え字が見事に対応している。**【公式Ⅰ(2)】**の方は，(1)の添え字をすべて -1 すればよい。

次の**<表2>**は，**<表1>**の各値とその累積を表したものである。

<表2>

k	x^k の係数	累積
5	1	1
6	5	6
7	15	21
8	35	56
9	70	126
10	126	252
11	205	457
12	305	762
13	420	1182
14	540	1722
15	651	2373
16	735	3108
17	780	3888
18	780	4668
19	735	5403
20	651	6054
21	540	6594
22	420	7014
23	305	7319
24	205	7524
25	126	7650
26	70	7720
27	35	7755
28	15	7770
29	5	7775
30	1	7776

<表2>で $k=17$ のときの累積を見れば，**【問題2】**の答えが3888通りであることが確認できる。

また，この表から，x^k の係数は $k=17,\ 18$ のときを中央として上下対称であることがわかる。これは

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=k\quad(1\leqq x_i\leqq 6)$

を満たす整数解が

点 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)$（ただし，$1\leqq x_i\leqq 6,\ x_i\in\mathbf{R}$）

で構成された5次元超立方体を，法線ベクトルが

$(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)$ である超平面

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=k$

で切った切り口にあらわれる格子点であることからも予想できる。

この対称性と**【公式Ⅰ】**を用いると，次のような問題も速やかに解答できる。

【問題3】　異なる5個のさいころを同時に投げたとき，目の和が20以下になる場合は何通りあるか。

【解答】

（目の和が20以下）

＝(全体)－(目の和が21以上)

＝(全体)－(目の和が14以下)　← 対称性

$=6^5-$(目の和が14以下)　……(イ)

また，**【公式Ⅰ(1)】**より

（目の和が14以下）

$=(1,\ -5,\ 10,\ -10,\ 5,\ -1)\cdot({}_{14}C_5,\ {}_8C_5,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$

$=(1,\ -5,\ 10,\ -10,\ 5,\ -1)\cdot(2002,\ 56,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$

$=2002-5\times 56=1722$　……(ロ)

(イ)，(ロ)より

（目の和が20以下）

$=7776-1722=6054$（通り）　答

もし，対称性を使わずに**【公式Ⅰ(1)】**で $k=20$ を代入すると，${}_{20}C_5$ を計算することになるので，少しだけ煩雑になる。

§3. まとめ

ここまでは，異なる5個のさいころを同時に投げたときの目の和について考えたが，異なる n 個のさいころのときも次の公式が成り立つ。

【公式Ⅱ】

$$(1-x^6)^n=1+a_1x^{r_1}+a_2x^{r_2}+\cdots\cdots$$

と昇べきの順に展開されたとする。異なる n 個の**「正六面体さいころ」**を同時に投げたとき

(1) 目の和が k 以下になる組合せの総数は

$$(1,\ a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots)\cdot({}_kC_n,\ {}_{k-r_1}C_n,\ {}_{k-r_2}C_n,\ \cdots\cdots)$$ 通り

(2) 目の和がぴったり k になる組合せの総数は

$$(1,\ a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots)\cdot({}_{k-1}C_{n-1},\ {}_{k-r_1-1}C_{n-1},\ {}_{k-r_2-1}C_{n-1},\ \cdots\cdots)$$ 通り

ただし，$n<r$ のとき　${}_nC_r=0$

また，普通の**「正六面体さいころ」**ではなく，**「正四面体さいころ」**としても同様の公式が成り立つ。

【公式Ⅲ】

$$(1-x^4)^n=1+a_1x^{r_1}+a_2x^{r_2}+\cdots\cdots$$

と昇べきの順に展開されたとする。異なる n 個の**「正四面体さいころ」**を同時に投げたとき

(1) 目の和が k 以下になる組合せの総数は

$$(1,\ a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots)\cdot({}_kC_n,\ {}_{k-r_1}C_n,\ {}_{k-r_2}C_n,\ \cdots\cdots)$$ 通り

(2) 目の和がぴったり k になる組合せの総数は

$$(1,\ a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots)\cdot({}_{k-1}C_{n-1},\ {}_{k-r_1-1}C_{n-1},\ {}_{k-r_2-1}C_{n-1},\ \cdots\cdots)$$ 通り

ただし，$n<r$ のとき　${}_nC_r=0$

さらに，次も成り立つ。

【公式Ⅳ】

$$(1-x^4)^l(1-x^6)^m(1-x^8)^n$$
$$=1+a_1x^{r_1}+a_2x^{r_2}+\cdots\cdots$$

と昇べきの順に展開されたとする。異なる**「正四面体さいころ」**を l 個，**「正六面体さいころ」**を m 個，**「正八面体さいころ」**を n 個の計 N 個のさいころを同時に投げたとき

(1) 目の和が k 以下になる組合せの総数は

$$(1,\ a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots)\cdot({}_kC_N,\ {}_{k-r_1}C_N,\ {}_{k-r_2}C_N,\ \cdots\cdots)$$ 通り

(2) 目の和がぴったり k になる組合せの総数は

$$(1,\ a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots)\cdot({}_{k-1}C_{N-1},\ {}_{k-r_1-1}C_{N-1},\ {}_{k-r_2-1}C_{N-1},\ \cdots\cdots)$$ 通り

ただし，$n<r$ のとき　${}_nC_r=0$

これらの公式に対しても，形式的べき級数を用いて**<表1>**，**<表2>**を作れば，x^k の係数(＝目の和がぴったり k になる場合の数)は，上下の対称性を保っている。

【問題4】 異なる正四面体さいころを3個，正六面体さいころを2個，正八面体さいころを1個の計6個のさいころを同時に投げたとき，目の和が25以下になる場合は何通りあるか。

【解答】

$$(1-x^4)^3(1-x^6)^2(1-x^8)^1$$
$$=1-3x^4-2x^6+2x^8+\cdots\cdots$$

よって，求めるものは

(目の和が25以下)

＝(全体)－(目の和が26以上)

＝(全体)－(目の和が12以下)　← 対称性

$=4^3\cdot6^2\cdot8^1$－(目の和が12以下)　……(イ)

また，**【公式Ⅳ】**より

(目の和が12以下)

$=(1,\ -3,\ -2,\ 2,\ \cdots\cdots)\cdot({}_{12}C_6,\ {}_8C_6,\ {}_6C_6,\ 0,\ \cdots\cdots)$

$=(1,\ -3,\ -2,\ 2,\ \cdots\cdots)\cdot(924,\ 28,\ 1,\ 0,\ \cdots\cdots)$

$=924-3\times28-2\times1=838$　……(ロ)

(イ)，(ロ)より

(目の和が25以下)

＝18432－838＝17594(通り)　答

とできる。

なお，紙面の関係から，公式の証明は割愛させていただく。

また，今回は紹介できなかったが，**【問題1】**の別解として，シンプレックス法で登場する**「スラック変数」**を用いる方法もある。例えば，参考文献〔2〕の $p.386$ には，「スラック変数」とは書かれていないが，これを用いた解法が紹介されているので，参考にされるとよい。

それは，次の問題である。

【問題5】

(参考文献〔2〕$p.386$ 重要例題 34(3)　改)

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 \leqq 3,\ a_i \geqq 0$$
$$(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 5)$$

を満たす整数の組の個数を求めよ。

【解答】

スラック変数 a_6 を付加して

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=3 \quad (a_i \geqq 0)$$

よって　　${}_6H_3=56$ (個)　答

これはこれでとても美しい！

こうしていろいろと見直してみると，結局，どの解法も魅力的だ。(みんなちがって，みんないい)

《参考文献》

〔1〕 大島利雄　著「数学書房選書7　個数を数える」数学書房(2019)

〔2〕 「新課程　チャート式　基礎からの数学 Ⅰ＋A」数研出版(2021)

(鳥取県立鳥取湖陵高等学校)