

この難問、どのようににはさみうつ？

～東大理系数学への挑戦！～

いがらし まさはる
五十嵐 正晴

§1. はじめに

『東大理系数学の解答を誰よりも早く公開しよう!』という自己研鑽を兼ねたチャレンジを始めて、2025 年で早くも 4 年目を迎えた。ようよう難しくなりゆく東大理系数学に対し、2025 年度の入試問題もさらに難しくなるのだろうか……と怯えながら、覚悟を決めて挑めた第 1 問。バジェ曲線が背景? などと、余計なことに気を取られながらも、ある程度淡々と計算処理を進めることができ、一安心。流石に、今年度は少し解きやすくなったであろうか? などと能天気なことを考えながら迎えた第 2 問。東京大学の 2025 年度前期理系の入試問題の第 2 問は、次のような問題であった。

(1) $x > 0$ のとき、不等式 $\log x \leq x - 1$ を示せ。

(2) 次の極限を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_1^2 \log \left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2} \right) dx$$

[25 東京大・理系第 2 問]

問題を眺めてみると、(1)が不等式評価で、(2)が定積分を含む極限となっている。見た目『だけ』は、見慣れた問題である。(1)の不等式評価を利用して、(2)は上手く挟めば終わりだろうと高を括っていた。

§2. 解答の道筋を考える

(1)を使えば、上からの評価はできそうであるが、下からの評価をどうするべきか。この時点で、やや嫌な予感がしてきた。 $y = \log x$ のグラフが上に凸であることを考えると、下から評価をするのは、やや工夫が必要である。とりあえず、直線の式で評価してみたが、あえなく撃沈。試行錯誤の末に、誘導を無視して、部分積分法を用いるという荒業に出た。

翌日、いくつかの解答例を拝見したところ、真数部分において、相加平均と相乗平均の大小関係を考える解法が挙げられていた。負け惜しみでしかないのだが、こう思わざるを得なかった。

『制限時間内で、この発想出る……?』

§3. 生徒の挑戦

さて、大変冗長な前置きであったが、本稿は『この難問を生徒が解くにはどのような手立てが必要か』というテーマである。不等式評価を利用して、極限を求める問題は頻出であるが、やはり、このレベルとなると、一筋縄ではいかない。進路が決定した 2 人の卒業生(以下 A, B)に同問の解答を作ってもらったのだが、なかなか興味深い卒業生の反応・気づきがあったため、共有させていただきたい(卒業生とのやりとりは、録画した動画データを元にして、一部の表現・口調を、記事としてふさわしいものに修正している)。

(I) (1)について

A : (1)は、微分するだけで簡単。

B : $f(x) = x - 1 - \log x$ として、 $x > 0$ における $f(x)$ の増減表をかけば終わり。

x	(0)	...	1	...
$f'(x)$	$\diagdown$	-	0	+
$f(x)$	$\diagdown$	$\searrow$	0	$\nearrow$

ここでつまづいてしまうと、やや企画倒れ気味になるところであったが、2 人とも難なく解いていた。

(II) (2)について

(20 分程度、それぞれで考えていたが……)

A : わからない……解けそうで解けない。

B : はさみうちの原理を利用するんだよね?

A : それしかないよね。でも、はさみ方がわからなくて詰んでしまった。

B: (1) を使おうとしたけれども、途中からよくわからなくなった。

以下は、B の答案の一部である。

(1) より、 $x > 0$ で

$$\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right) \leq \frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2} - 1$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{2}$$

よって

$$n \int_1^2 \log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right) dx$$

$$\leq n \int_1^2 \frac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2} n \left[\frac{1}{\frac{1}{n} + 1} x^{\frac{1}{n} + 1} - x \right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2} n \left\{ \left(\frac{1}{\frac{1}{n} + 1} \cdot 2^{\frac{1}{n} + 1} - 2 \right) - \left(\frac{1}{\frac{1}{n} + 1} - 1 \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} n \left(\frac{2n}{n+1} \cdot 2^{\frac{1}{n}} - \frac{n}{n+1} - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{2} n \cdot \frac{2n \cdot 2^{\frac{1}{n}} - n - n - 1}{n+1}$$

$$= \frac{n}{2(n+1)} \cdot (2n \cdot 2^{\frac{1}{n}} - 2n - 1)$$

$$= \frac{n}{2(n+1)} \cdot \{2n(2^{\frac{1}{n}} - 1) - 1\}$$

A: 最後の $\{ \}$ の中が、不定形だね。

B: そう。ここで終わった。

ここから、様々な変形を試みていたが、結局、不定形が解消されることはなく困っていたので、1 つヒント(【問題】)を与えた。

【問題】

極限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin x - \sin 1}{\sin(x-1)}$ を求めよ。

A: あー、微分係数の定義を利用する問題。

B: これがヒントってことは、……えっ、使える？

ヒントの意図には気づいたようであるが、どこでそのヒントを活用するのかわからないようであった。

しかし、A から、次に繋がる発言が出た。

A: $\{2n(2^{\frac{1}{n}} - 1) - 1\}$ の $\frac{1}{n}$ を、 t で置き換えたら

$$\left\{ \frac{2}{t} (2^t - 1) - 1 \right\} = \left(2 \cdot \frac{2^t - 1}{t} - 1 \right)$$

になるから……。

B: あー！ やっと見つけた！ ここ(分数部分)でヒントが使えるね。

置き換えた瞬間に、適切な方針が立てられた。これで、上からの評価はできた。

A: 下からの評価も、この式((1)の式)を使うのかな。

B: 対数の不等式は逆向きにできるって、課外授業で学習したもんね。

A: あー、置き換えのやつね。そういうことか。

さて、確かに(1)の式において、 x を $\frac{1}{t}$ で置き換えると、下から評価する式を作ることができる。2 人とも、過去の学びを生かしていることに感心しつつ、心の中で謝る。なぜならば、その道は、筆者も通ったのだが、途中で、極限が計算できない式にぶつかるのだ(この方針で求めることができた方がいらっしやれば、是非、解き方をご教授いただきたい)。少し期待しながら眺めていたが、やはり、極限は求まらず。ここで、次のヒントを与えた。対数関数の特徴を考えてほしい。

A: 特徴……底が1 より大きいときと小さいときで、右上がりの曲線になるか、右下がりの曲線になるかが違うとか？

B: 今回は関係ないよね。底は e だし。

さらに、もう1 つ。下から評価をしたいとき(最小値を考えたいとき)に、使える手法を考えてほしい。

A: 因数分解とか微分法とか？

B: 平方完成と、相加平均と相乗平均の大小関係、後は……。

準備は整ったが、果たしてこれで出るだろうか。15分程度考えていたが、ここまでお膳立てしても、 $\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right) \geq \log x^{\frac{1}{2n}}$ は、やはり出なかった。真数部分に対して、相加平均と相乗平均の大小関係を用いるというのは、言われてみれば確かに……となるものの、いざ問題と相対すると、思いのほか出てこない。

そこで、別の質問を投げてみた。(1)は、一旦置いておくとしよう。この問題を『対数関数の積分を含む問題』という観点で捉えたら、どのような方針を立てるだろうか。

A・B：部分積分法。

2人とも即答であった。実際、部分積分法を用いる方針で解いてみると、Aは、 $\int_1^2 \frac{1}{1+x^{\frac{1}{n}}} dx$ の処理ができずに止まってしまったが、Bは、時間がかかりつつも、『定積分と不等式』の類題経験を生かして、完答していた。ただし、こちらも、微分の定義を使うため、途中でヒントを与えていなければ厳しかったであろう。

§4. 生徒の解答から

一連の流れを踏まえて、今後の指導で留意したい点がいくつかある。

- ① 極限の問題において、『微分の定義』を使うという発想を忘れないようにすること。
- ② 前問を踏まえて考える(誘導に乗る)ことは非常に大切だが、自身の経験則から別の方針がすぐに立つのであれば、それを試す価値はあること。
- ③ 相加平均と相乗平均の大小関係は、単調な関数の変数部分に着目して考えるケースもあること。
- ④ $\frac{1}{n}$ や $-x$ は、置き換えると見通しがよくなること。

①について、常々留意しているつもりではあったのだが、様々な入試問題演習を経た後では、発想として出づらくなることがわかった。筆者の指導力不足は否めないのだが、極限の復習をする上での問題構成を工夫し、『微分の定義』という発想が抜け落ちないようにしたい。

②について、共通テストを含め『前問がなぜついているのか、その意図をよく考えよう』という原則を、口を酸っぱくして指導しているのだが、誘導に乗った結果、逆に泥沼にはまってしまうケースも稀にある。時間が長めに確保されている2次試験では、自分の考えやすい解法を試してみる価値は十分にある。

③について、上からの評価では、対数全体を評価するのに対して、下からの評価では、対数全体ではなく、真数部分に着目して評価をするというのも相まって、発想としては、非常に出づらいつと考えられる(発想のズレという表現がしっくりくるだろうか)。筆者も、この類の問題を授業等で扱ったことはなかったため、大変参考になる問題であった。

④について、極限を考えたい式に $\frac{1}{n}$ を含む場合や、 $\lim_{x \rightarrow \infty}$ が出てきたときに、適切な置換をしようという方針自体はしばしば扱うが、ある程度の演習を積んでくると、指導者側が置換をせずに進めてしまうことがあると思う(時間短縮をしたいという動機から、筆者も、そのようにしてしまう節は、確かにあったように思う)。生徒の到達段階によらず、方針が捉えやすくなる置換を、常に心がけるように指導をすることが大切であると、改めて感じた次第である。

§5. おわりに

東大理系数学は、全体の出題構成に目を向けると、難化の一途を辿っている(ように筆者は感じている)。この難易度の問題を解き、合格に必要な点数をかき集めるために必要な数学力を、高々3年で培うというのは、相当高いハードルに感じる。どのような対策を講じていくべきか、多くの先生方のご意見を伺ってみたいところである。

生徒とのやりとりを経て執筆した内容のため、いつもよりやや碎けた書きぶりとなったが、そこはご愛嬌ということで。

(山口県立下関南高等学校)