

「極方程式グラフについて」

～教科書の問題から

しぶや つとむ
渋谷 勤

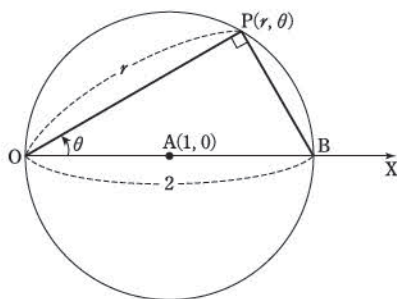
§1. はじめに

カージオイド $r=a(1+\cos\theta)$ のグラフはどのようにしてかくのでしょうか。筆者が高校生のときの教科書の名前は「数学Ⅰ」「代数・幾何」「基礎解析」「微分・積分」「確率・統計」であり、極方程式を高校在学中に扱った記憶がありません。大学でこの曲線を見たとき、微分？増減表？と迷いました。授業の中で、極方程式グラフを苦手とする生徒が多いことに気づきます。もしかしたら(筆者を含めて)苦手な先生も多いのではないのでしょうか。教科書の問題を基に説明したいと思います。

§2. 極方程式グラフの概形の考え方

【問題1】(参考文献〔2〕p.155 練習35(3) 改)
極方程式 $r=2\cos\theta$ で表される曲線を図示せよ。

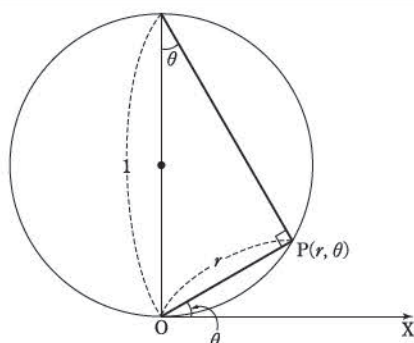
【解答】



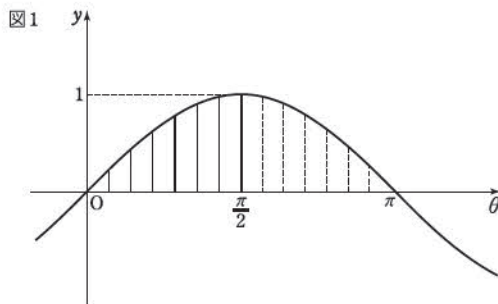
教科書によくある問題です。上図のように偏角 θ をとり、直角三角形を作図すればよいのですが、すぐにこの図に気づくでしょうか。筆者は、難しいと思います。覚えていないとかけません。グラフ→偏角 θ をとる→極方程式の順では理解できて、極方程式→偏角 θ をとる→グラフは気づかないと思います。せめて、グラフの概形だけでもすぐに見抜けないでしょうか。

【問題2】(参考文献〔2〕p.156 練習37(2) 改)
極方程式 $r=\sin\theta$ の表す曲線の概形をかけ。

【解答】



【考察】ここで、よく使われる「グラフの足し算」をあてはめてみましょう。 $y=\sin\theta$ のグラフは図1のようになります。



この θ 座標に相当するものを偏角 θ で表し、グラフの足し算をすると、グラフの概形は次の図2のようになります。

図2

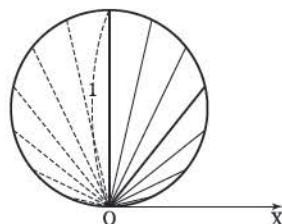


図1の平行線分を、図2のOを始点とする線分として移します。2つの図中のそれぞれの線分は同じ長さです。慣れれば、紙にかかなくても頭の中で描けます。「サインカーブの山1つが、振幅を直径とする円になる」わけです($\pi \leq \theta \leq 2\pi$ のときも、同様に図示できます)。

三角関数の合成により

$$r = a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \theta_0)$$

となりますから、次のことが成り立ちます。

【まとめ】

$$r = a \sin(\theta + \alpha), \quad r = b \cos(\theta + \beta),$$

$r = a \sin(\theta + \gamma) + b \cos(\theta + \gamma)$ (α, β, γ は 0 でもよい) で表される極方程式は、始点 O を通り振幅を直径とする円を表す(直径は、O から「 r が最大となる方向」へ伸びていきます)。

【問題3】 (1) 参考文献[2] p.155 例題9 改,

(2) 参考文献[2] p.155 練習36(1)

次の極方程式で表される曲線を図示せよ。

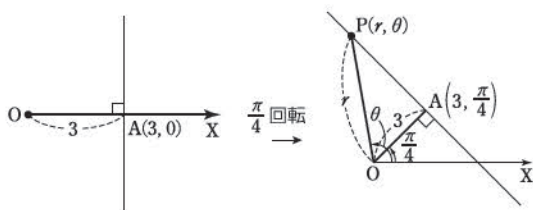
$$(1) \quad r \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 3$$

$$(2) \quad r \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 2$$

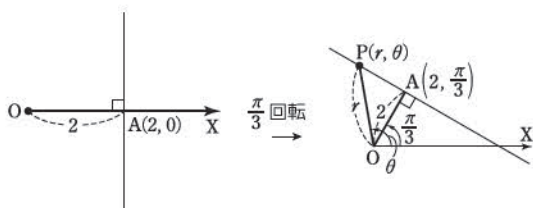
これも、教科書の問題です。生徒はすぐに作図できるでしょうか。別解として、加法定理で展開し、 $r \cos \theta = x$, $r \sin \theta = y$ と置き換え、直交座標でグラフを図示できます。しかし、もっと簡単にできます。教科書の練習では、この問題の後に「極方程式 $r \cos \theta = 3$ …… ① の図示」(参考文献[2] p.155 練習36(2))が出てきます。これは、直交座標で $x=3$ とすぐに求まります。これを利用します。「数学I」で学習した平行移動と同様に考えます。

(1) 直線①を、 θ 軸方向に $\frac{\pi}{4}$ だけ平行移動ではな

く、始点 O の周りに $\frac{\pi}{4}$ だけ回転移動して、答えとなります。まっすぐの θ 軸が、円状に曲がったイメージです。



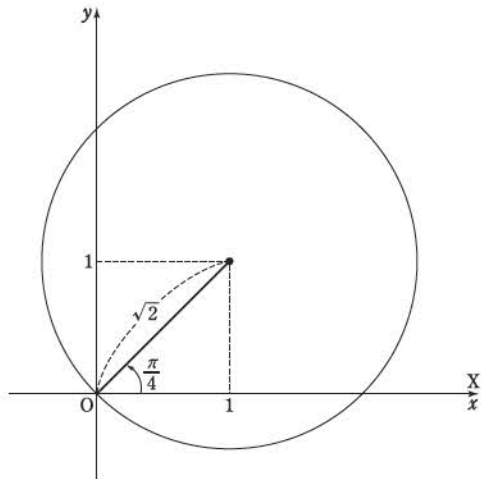
(2) 同様にして



【問題4】 (参考文献[2] p.156 例題10【注意】)

極方程式 $r = 2\sqrt{2} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ で表される曲線を図示せよ。

【解答】 極方程式 $r = 2\sqrt{2} \cos \theta$ で表される円を、始点 O の周りに $\frac{\pi}{4}$ だけ回転移動して



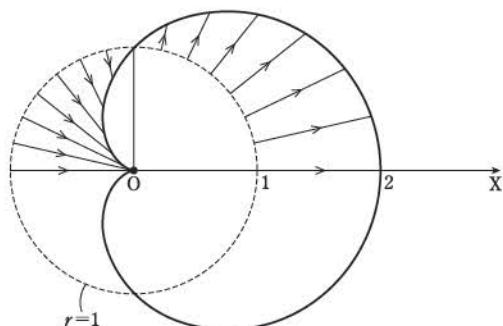
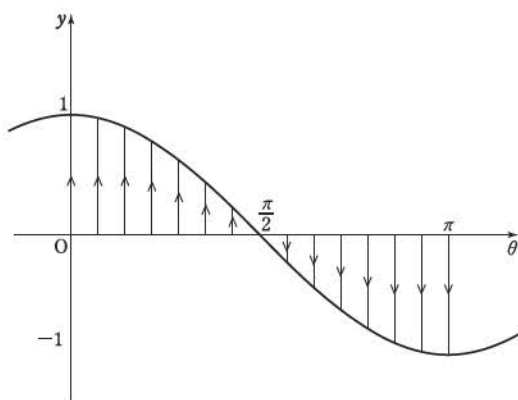
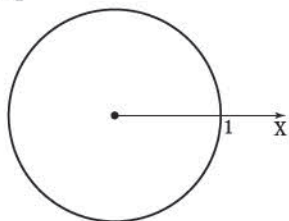
または、【まとめ】の結果から【問題4】は、すぐに $\theta = \frac{\pi}{4}$ の方向へ直径 $2\sqrt{2}$ の円と求まります。

【問題5】

極方程式 $r=1+\cos\theta$ の表す曲線の概形をかけ。

カージオイドです。「グラフの足し算」で考えてみましょう。円 $r=1$ に $r=\cos\theta$ を足して、概形を得ます。

$r=1$



では、次の問題はどうか。

【問題6】 (1) 参考文献〔2〕p.157 例題12 改、

(2) 参考文献〔2〕p.157 練習39 改

次の極方程式の表す曲線の概形をかけ。

(1) $r = \frac{2}{1+\cos\theta}$

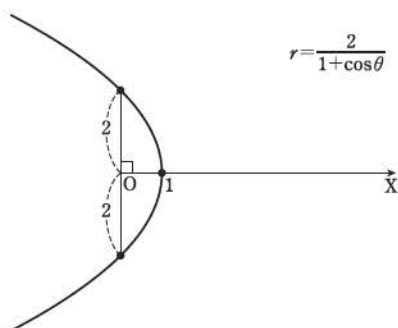
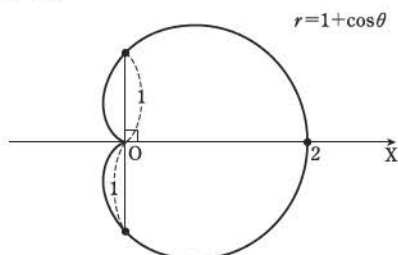
(2) $r = \frac{2}{1-\sin\theta}$

【解説】

(1) $r = \frac{2}{1+\cos\theta}$ ①

まず、分母だけについて考えます。 $r=1+\cos\theta$ の表すグラフは、【問題5】からカージオイドです。このカージオイドが分母にあると考えると

($y=f(x)$ と $y=\frac{1}{f(x)}$ のグラフの関係のように捉えて) 次の概形を見抜きます。特定の点●の対応を確認すれば、概形を捉えるのは難しくないと思います。



(2) $r = \frac{2}{1-\sin\theta}$ ②

同様に、分母だけについて考えます。

$$\begin{aligned} r &= 1 - \sin\theta = 1 + \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 1 + \cos\left\{\theta - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\} \end{aligned}$$

であるから、 $r=1+\cos\theta$ のカージオイドを、始点Oの周りに $-\frac{\pi}{2}$ だけ回転移動した形になります。したがって、②の曲線も、①の放物線を、始点Oの周りに $-\frac{\pi}{2}$ だけ回転移動したものとなります。(1)、(2)ともに、分母にカージオイドがあると、その逆数が放物線を表すのは面白いですね。さらに、教科書では、次の2つの極方程式

$$r = \frac{2}{1+2\cos\theta} \dots\dots ③, r = \frac{1}{2+\cos\theta} \dots\dots ④ \text{ が}$$

扱われています。(③ 参考文献〔2〕p.158 問 8,
④ 参考文献〔2〕p.158 練習 40 (2)) 分母は, ③,
④ともにカージオイドではありません。一般の
リマソン $r=a+b\cos\theta$ です。表す曲線は, ③
が双曲線 $3x^2-y^2-8x+4=0$, ④が楕円
 $3x^2+4y^2+2x-1=0$ となります。 a, b の大小
関係によって, 分母の表す曲線は, 元の「中心 O,
半径 $r=a$ の円」から偏角 θ の方向に最大 b だ
け, 盛ったり削ったりされて形が崩れていくわけ
です。これらが分母にあることによって, 元の極
方程式が放物線, 双曲線, 楕円と変化するの興味深いものです。

§3. 終わりに

多くの証明, 説明を省略させていただきました。
以上の内容は, あくまでもグラフの概形を捉える方
法の一例として述べたものです。この原稿が, 数学
教育の一助となれば幸いです。最後までお読みいた
だき, ありがとうございました。

《参考文献》

- 〔1〕 「数学Ⅲ」数研出版(2023)
 - 〔2〕 「数学C」数研出版(2023)
- (千葉県 日本大学習志野高等学校)