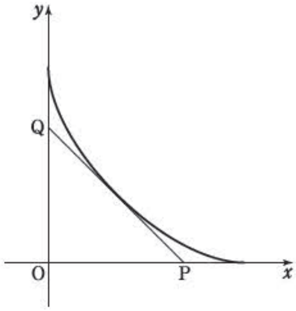
円の接線公式の拡張
曲線 $x^k \pm y^k = a$ の接線公式 $s^{k-1}x \pm t^{k-1}y = a$

難波（なんば）　忠彦（ただひこ）

§1. はじめに

今回の着想を得たのは，アステロイドの性質についての次の**【問題】**に対する，生徒の解答を見たときのことである。

> **【問題】**
> 曲線 $C: x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1\ (x>0, y>0)$ 上の任意の点における接線と，x 軸，y 軸との交点をそれぞれP，Qとするとき，線分PQの長さは一定であることを示せ。



証明

$x>0$，$y>0$ のとき，$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ の両辺を x について微分すると

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

よって，$y\neq 0$ のとき

$$\frac{dy}{dx}=-\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

したがって，C 上の点$(s,\ t)$

$(s>0,\ t>0,\ s^{\frac{2}{3}}+t^{\frac{2}{3}}=1)$ における接線の方程式は

$$y-t=-\left(\frac{s}{t}\right)^{-\frac{1}{3}}(x-s) \qquad \cdots\cdots ①$$

＜以下略＞

①以降は，①に $x=0$ や $y=0$ を代入して，P，Qの座標を入手すれば，すぐに証明できる。しかし，この解答を書いた生徒は，①の式をさらに変形して

$$s^{-\frac{1}{3}}x+t^{-\frac{1}{3}}y=s^{\frac{2}{3}}+t^{\frac{2}{3}}=1 \qquad \cdots\cdots ②$$

という式を作り，これを利用して，その後の計算をしていた。筆者は，この式を見て，これが**【円の接線公式】**と酷似していることに気づいた。

> **【円の接線公式】**
> 円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点$(s,\ t)$におけるこの円の接線の方程式は
> $$sx+ty=r^2$$

これまで，この公式は「x^2 と y^2 をそれぞれ2つに分け，xx と yy にし，その片方ずつに$(s,\ t)$を代入しよう」と指導してきたが，②の式が一般に成り立つのであれば，「x^k と y^k を $x^{k-1}x$ と $y^{k-1}y$ に分け，それぞれ前半に$(s,\ t)$を代入しよう」となる。もちろん，求めたいものは接線の方程式であるから，x と y の1次の項をそれぞれ残すのは自然な発想である。

§2. 曲線の接線の方程式

ということで，次のような**【予想】**を立てた。ただし，簡略化するために，曲線は第1象限の部分だけを考えるという条件をつけている。

> **【予想】**
> 曲線 $x^k+y^k=1\ (k\neq 0,\ x>0,\ y>0)$ 上の点$(s,\ t)$におけるこの曲線の接線の方程式は
> $$s^{k-1}x+t^{k-1}y=1$$

証明

$x>0$, $y>0$ のとき，$x^k+y^k=1$ の両辺を x について微分すると

$$kx^{k-1}+ky^{k-1}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$(x,\ y)=(s,\ t)$ のとき

$$ks^{k-1}+kt^{k-1}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\iff\ \frac{dy}{dx}=-\frac{s^{k-1}}{t^{k-1}}\quad(k\neq 0,\ t>0)$$

ゆえに，曲線上の点$(s,\ t)$における接線の方程式は

$$y-t=-\frac{s^{k-1}}{t^{k-1}}(x-s)$$

$$\iff\ s^{k-1}x+t^{k-1}y=s^k+t^k$$

ここで，点$(s,\ t)$は曲線 $x^k+y^k=1$ 上の点であるから

$$s^k+t^k=1$$

以上により，求める接線の方程式は

$$s^{k-1}x+t^{k-1}y=1$$

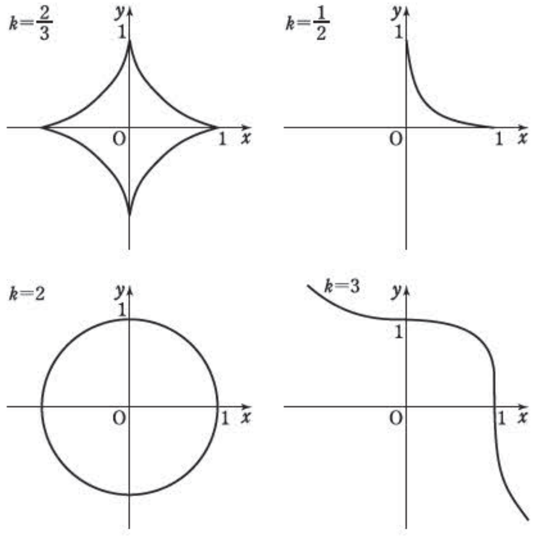
証明終

以上により，予想が正しかったことが証明された。

ここで，第1象限に限定した理由について説明したい。k の値や，接点の x 座標や y 座標によって，次のような問題点がある。

［1］ **底(x 座標や y 座標)が負の値のときに問題あり**

k が整数であれば，計算ができる。また，k が有理数のとき，既約分数で表して分母が奇数であれば，計算ができる。しかし，それ以外のときは，実数の範囲では計算できない。



［2］ **接点の x 座標や y 座標が0のときに問題あり**

例えば，前図の $k=\frac{2}{3}$（アステロイド)のときを具体的に考えると，そもそも $x=0$ や $y=0$ においては，微分可能とは言えない。しかし，接線を考えるだけであれば，点$(1,\ 0)$における接線の方程式は $\boldsymbol{y=0}$ である。一方，前述の公式に

$(s,\ t)=(1,\ 0)$ を代入すると，$\boldsymbol{x=1}$ が手に入る。

これは，$k<1$ のときに生じる問題で，

$s^{k-1}x+t^{k-1}y=1$ において，$t\to 0$ とすれば $y=0$ が手に入るのだが，$t=0$ とすると上手くいかない。

$k>1$ のときには，楕円の接線公式を，微分を用いて証明するときと同様に処理できる。

§3. まとめ

以上の理由により，k の値によっては，円のように第1象限という限定をつけなくてもよい場合もあるが，今回はどの場合でも成立することを優先した。

また，同様にすると $x^k-y^k=1$ や $x^k-y^k=-1$ の場合もすぐに証明できるので，次のようにまとめることができる。

> 【まとめ1】
> 曲線 $x^k\pm y^k=a$ $(k\neq 0,\ x>0,\ y>0)$ 上の点$(s,\ t)$におけるこの曲線の接線の方程式は
> $$s^{k-1}x\pm t^{k-1}y=a\quad(\text{複号同順})$$

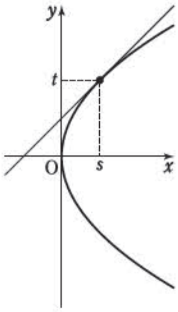
また，楕円や双曲線の接線の公式を意識すると

> 【まとめ2】
> 曲線 $\dfrac{x^k}{a^k}\pm\dfrac{y^k}{b^k}=1$ $(k\neq 0,\ x>0,\ y>0)$ 上の点$(s,\ t)$におけるこの曲線の接線の方程式は
> $$\frac{s^{k-1}x}{a^k}\pm\frac{t^{k-1}y}{b^k}=1\quad(\text{複号同順})$$

という形でも有効かもしれない。

こうなると次に気になるのは，**【放物線の接線公式】**である。あまりメジャーではないが，次のようなものである。

【放物線の接線公式】
放物線 $y^2=4px$ 上の点$(s,\ t)$におけるこの放物線の接線の方程式は
$$ty=2p(x+s)$$



微分をすればただちに手に入るが，覚え方としては，y^2 を yy に，$4px$ を $2px+2px$ に分けて，それぞれ片方ずつに$(s,\ t)$を代入しよう，と円のときになぞらえて説明することもあるだろう。

放物線は x と y の次数が違うので，これを単純化かつ一般化するのであれば，次のようであろうか。

【疑問】
曲線 $x^p+y^q=a$ 上の点$(s,\ t)$におけるこの曲線の接線の方程式はいかに？

この結果は，例えば $p>q$ のときは
$$s^{p-1}x+t^{q-1}\cdot\frac{qy+(p-q)t}{p}=a$$
となり，あまり実用的な形にすることができなかった。もっと見栄えのよい変形を見つけた方は教えていただきたい。

§4．最後に

以上の考察により，**【円の接線公式】**を限定的にではあるが，拡張することができた。実際に目にする入試問題では k の値がわかっている場合が多く，もっと広く定義域を取れる場合でも同様に証明できるので，第1象限に限らず，素早く接線の方程式を手に入れることが可能になった。今回のように，生徒の何気ない(ときには最善ではない)板書から得られる知見がある。今後も，生徒から教えられる立場でもあるという姿勢を忘れずにいたい。

《参考文献》

〔1〕 坂本茂　著「曲線と接線について」数研通信　数学　No. 50

（岡山県立岡山朝日高等学校）