

体積をどのように求めていくか？

むぎたに なおひさ
麦谷 直久

§1. はじめに

「体積を求める問題に対して、どのような方針を立てるか？」

「体積の問題は、一部のタイプを除いて、立体図または断面図(多くの場合はその両方)をかくなどして、その都度空間的に図形の性質を考えながらアプローチしていく、かなり応用的な問題であり、問題を見てから方針が思い浮かぶもの」というのが、一般的な認識ではないでしょうか。

ところで、体積に図形的処理をもちこむと、当然のことながら、その都度空間的な考察をしなくてはなりません。

そこで、数式処理によるアプローチを前面に押し出すことで、いつも同じように体積を求める(ように思える)方法を、今回は示したいと思います。

図形的処理 $\longleftrightarrow$ 数式処理

〈その都度考える〉 $\longleftrightarrow$ 〈一定手順(に見える)〉

大雑把に方針を述べると「座標空間に埋め込める立体は埋め込む。ただし、埋め込むほどではない立体(問題)や、埋め込めない立体は、その都度考える」というものです。

§2. 大きな流れ

体積をもつ立体は、立体を表す不等式が書ける場合が多いので、それを利用していきます。具体的には、次の手順(フローチャート)になります。

- 立体が、座標空間に埋め込めるか判断する。
→ Yes の場合のみ、次に進む。
No の場合は、これまで通り、その都度考える。
- 立体を表す不等式の組を書き表す。
(立体図をかく必要はない。)
- 積分軸を決める。
(x, y, z 軸のどれかに平行なものに限る。)
- 断面図をかき、それを利用して、断面積を求める。

□ 体積を求める積分を立式する。

□ 積分の計算をする。

上の大きな流れの中では、特に、□、□が特徴的です。ただし、その後は、従来通りの方法、すなわち、「□を目指すこと」が目的です。このことに留意しながら次の実践を読んでいただくと、読みやすいと思います。また、今後 R は実数の集合を表します。

§3. 実践

それでは、以下の問題を解きながら、上述の手順の説明をします。ただし、今回の解答はわかりやすさのために、答案のような形式ではなく、フローチャート式に図式化してあります。また、その中で、□、□、……、□とあるのは、上記の□、□、……、□に対応しています。

【問題1】(参考文献[1] p.191 応用例題3 改)
底面の半径が a で高さも a である直円柱がある。この底面の直径 AB を含み底面と 45° の傾きをなす平面で、直円柱を2つの立体に分けると、小さい方の立体 M の体積 V を求めよ。

【解答】

□ 〈Yes だと予想した〉

底面が xy 平面上に、底面の中心が原点にあり、直径 AB と x 軸が重なるように埋め込む。

↓

$$\square \begin{cases} 0 \leq z \leq y \\ x^2 + y^2 \leq a^2 \end{cases} \quad \langle M \text{ を表す不等式} \rangle (\ast 1)$$

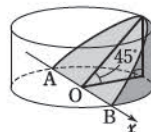
$$\downarrow x=t \text{ とおくと } -a \leq t \leq a$$

……(※2), (※3)

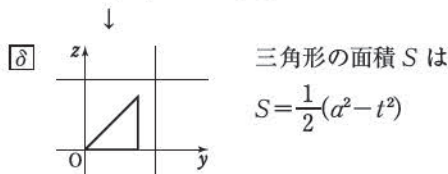
$$\square \begin{cases} 0 \leq z \leq y \\ -\sqrt{a^2 - t^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - t^2} \end{cases}$$

すなわち

$$0 \leq z \leq y \leq \sqrt{a^2 - t^2}$$



〈次の[δ]のために、 y, z を意識した表記にする〉



↓

[ε], [ζ] $V = \int_{-a}^a \frac{1}{2}(a^2 - x^2) dx = \frac{2}{3}a^3$

(※1)

立体を表す不等式のうち、どれか1つでも抜けたら、体積を求めることはできない。立体は、必ず1つまたはいくつかの方程式・不等式で表されているので、そのすべてを書く必要がある。

(※2)

今回は、 y 軸で切っても手間は同じ(積分の簡単さのために、教科書などでは、 x 軸で切っている)。様々な参考書に「 x 軸 y 軸 z 軸のどの軸に垂直な面で切るか」のコツが載っているが、それは、断面図ができるだけ単純になるような工夫である。特に、円がらみの図形では、扇形や円の一部分は積分が大変(円そのままならよいが)であるから、避けられるなら避けたい。

(※3)

厳密には「式[β]を満たす、 y, z が存在するような x (つまり t)の条件を求める」ことにより、 t の条件が得られることになる。しかし、多くの場合、図などから自明であることが多い。また、この t の範囲が、後に体積を求める積分の積分区間になる。

【問題2】

3つの不等式 $0 \leq z \leq 1$, $x^2 + y^2 \leq 1$, $x + z \geq 1$ で表された領域を M とする。 M を x 軸のまわりに1回転させたときに M が通過した領域を M' とする。 M' の体積 V' を求めよ。

【解答】

[α] 〈YES だと予想した〉

↓

[β] $\begin{cases} 0 \leq z \leq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \\ x + z \geq 1 \end{cases}$ 〈 M を表す不等式〉

↓ $x = t$ とおくと $0 \leq t \leq 1$ ……(※)

[γ] $\begin{cases} -\sqrt{1-t^2} \leq y \leq \sqrt{1-t^2} \\ 1-t \leq z \leq 1 \end{cases}$

〈次の[δ]のために、 y, z を意識した表記にする〉



よって、回転体の断面積 S は

$$S = \pi R_M^2 - \pi R_m^2 = \pi(1+2t-2t^2)$$

[ε], [ζ] $V' = \int_0^1 \pi(1+2t-2t^2) dt = \frac{4}{3}\pi$

(注)

「回転体の体積を求める時には、回転前の図形で考えよ」というのはよく言われるが、今回の「埋め込み」の方法でも、同じである。また、同じ回転でも、最後に回転する部分ではない回転(例えば、最初に x 軸を中心に回転して、次に y 軸を中心に回転する問題における、最初の回転)に関する数式の操作も、トレーニング(10分ほどでできる)しておくといよい。

【問題3】

xyz 空間に3点 $A(1, 1, 0)$, $B(-1, 1, 0)$, $C(-1, 1, 2)$ をとる。 $\triangle ABC$ を z 軸の周りに回転して得られる回転体の体積を求めよ。

【解答】

[α] 〈YES だと予想した〉

↓
 $\triangle ABC$ の周または内部に存在する、ある1点を $P(x, y, z)$ とする。 P は次のように表すことができる。

$$\begin{cases} \overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \\ s \geq 0, t \geq 0, s+t \leq 1 \end{cases}$$

を満たす $s, t \in \mathbb{R}$ が存在する。

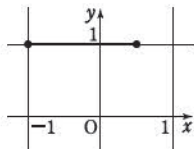
↓(s, t を消す)

[β] $\begin{cases} y=1 \\ x+z \leq 1, z \geq 0, x \geq -1 \end{cases}$
↓ $z=k$ とおくと $0 \leq k \leq 2$

[γ] $\begin{cases} y=1 \\ -1 \leq x \leq 1-k \end{cases}$
〈次の[δ]のために、 x, y を意識した表記にする〉

↓

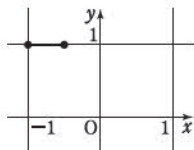
⑤ (i) $0 \leq k \leq 1$ のとき



線分と原点との距離の
 最大値 R_M は $R_M = \sqrt{2}$
 最小値 R_m は $R_m = 1$
 よって、回転体の断面積
 S は

$$S = \pi R_M^2 - \pi R_m^2 = \pi$$

(ii) $1 < k \leq 2$ のとき



線分と原点との距離の
 最大値 R_M は $R_M = \sqrt{2}$
 最小値 R_m は
 $R_m = \sqrt{(1-k)^2 + 1^2}$
 よって、回転体の断面積
 S は

$$S = \pi R_M^2 - \pi R_m^2 = 2\pi k - \pi k^2$$

⑥ ⑦ $V = \int_0^1 \pi dk + \int_1^2 (2\pi k - \pi k^2) dk = \frac{5}{3}\pi$

【問題4】 (参考文献[1] p. 191 練習7)

曲線 $y = \sin 2x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) を C とする。曲線 C 上の点 P を通り y 軸に平行な直線と x 軸の交点を Q とし、線分 PQ を1辺とする正三角形 PQR を、 xy 平面に対して垂直に作る。 P の x 座標が 0 から $\frac{\pi}{2}$ まで変わるとき、この正三角形が通過してできる立体の体積を求めよ。

【解答】

① 〈NO だからその都度考える〉

これは、教科書の練習問題で「積分軸に垂直な断面の面積を求める」を利用する基本中の基本問題。埋め込むまでもないし、埋め込むと、その手間の分、遠回りとなる。

【問題5】

曲線 $y = x^2 - 2$ と x 軸とで囲まれた部分を x 軸を軸として1回転させたときに通過した部分の体積を求めよ。

【解答】

① 〈NO だからその都度考える〉

埋め込むことは簡単であるが、埋め込む必要すらない簡単な問題。「積分軸に垂直な断面の面積を求める」を利用する。ちなみに、回転体を表す不等式は $\sqrt{y^2 + z^2} \leq 2 - x^2$ である。

東京大学の2020年度前期理系の入試問題の第5問は、次のような問題であった。

【問題6】

座標空間において、 xy 平面上の原点を中心とする半径1の円を考える。この円を底面とし、点 $(0, 0, 2)$ を頂点とする円錐(内部を含む)を S とする。また、点 $A(1, 0, 2)$ を考える。

(1) 略

(2) 点 P が S を動くとき、線分 AP が通過する部分の体積 V を求めよ。

[20 東京大・理系第5問 改(一部省略)]

【筆者が考えた解答】

① 〈YES だと予想した〉

↓

$P(x, y, z)$ とおき、線分 AP 上の点を $Q(X, Y, Z)$ とする。

$$\begin{cases} \overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AQ} \\ s \geq 1 \\ (z-2)^2 \geq 4(x^2 + y^2), 0 \leq z \leq 2 \end{cases}$$

を満たす $s, x, y, z \in \mathbb{R}$ が存在する。

⇔

$$\begin{cases} x = s(X-1)+1, y = sY, z = s(Z-2)+2 \\ s \geq 1 \\ (z-2)^2 \geq 4(x^2 + y^2), 0 \leq z \leq 2 \end{cases}$$

を満たす $s, x, y, z \in \mathbb{R}$ が存在する。

⇔

② $\begin{cases} 1 \leq s \leq \frac{2}{2-Z} \\ 4\{s(X-1)+1\}^2 + 4s^2 Y^2 \leq s^2 (Z-2)^2 \end{cases}$

を満たす $s \in \mathbb{R}$ が存在する。

↓ $Z = t$ とおくと $0 \leq t \leq 2$

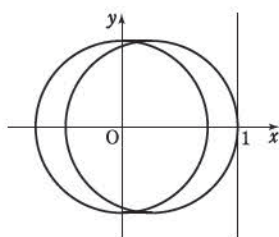
③ $\begin{cases} \left\{X - \left(1 - \frac{1}{s}\right)\right\}^2 + Y^2 \leq \frac{1}{4}(2-t)^2 \\ 1 - \frac{t}{2} \leq \frac{1}{s} \leq 1 \end{cases}$

を満たす $s \in \mathbb{R}$ が存在する。

↓

⑤ よって、APの
通過する部分の、
 $Z=t$ における断
面積は

$$\left(\frac{2-t}{2}\right)^2 \pi + (2-t) \cdot \frac{t}{2}$$



⑥, ⑦
$$V = \frac{\pi}{4} \int_0^2 (t-2)^2 dt - \frac{1}{2} \int_0^2 t(t-2) dt$$

$$= \frac{2(\pi+1)}{3}$$

§4. この手法が適用できる割合

この手法が、体積を求める入試問題において、どの程度の割合で適用できるか、というと、例えば、過去の東大入試の問題であれば、今回の手法で解いた方がよいと思われるものは(筆者の感覚ですが)5割ほどです。5割は少ないように見えますが、東大の問題において、方針が(考えることなく)始めから立つというだけで、アドバンテージになります。なお、他の大学においては、ほとんどが、今回の手法で解くことができると思います(例えば、東北大学の2018年度前期理系の入試問題の第6問で出題された、教科書の発展でも扱われている「斜め回転」は、この手法ではできません)。

§5. 立体の体積を求めることは難しい

この手法は、何か特異な方法というものではなく、とても自然なものです。数式の扱いに習熟している生徒にとっては、道筋がはっきりしていて、もう体積は大丈夫、と思えるのではないのでしょうか。一方、数式の扱いがそれほど得意でない生徒にとっては、とても難しく感じるでしょう。ただ、そのような生徒は、他のやり方でさあ解いてみる、と言っても難しいのではないのでしょうか。

ぱんと海に投げ込んで「さあ泳いでみろ。」というのも1つですが、やはり、基本の泳ぎ方を教えた上で「自由に解いていいよ。」というのが、よりよいと筆者は考えます。「埋め込める図形は、不等式で表してしまう。」というはっきりとした王道を示してあげると、生徒は、安心感を持って体積の問題に取り組もうとするのではないのでしょうか。

§6. また今度

筆者は「応用問題を解ける生徒を育てるためには、どのような訓練をすればよいか?」というテーマに、とても興味を持っています。

もちろん、この手法も、その一環としてあります。ただし、体積を求める問題は応用問題に見えるのですが、今回の手法を使えば、単なる手順暗記になるので、「応用問題を解ける生徒を育てるためには、どのような訓練をすればよいか?」というテーマに関しては、ややインチキな感があります。

「応用問題を解ける生徒を育てるためには、どのような訓練をすればよいか?」というテーマに、終着点や正解はないのかもしれませんが、筆者は、このテーマに対して、サッカーのトレーニングの考え方を真似て行っています。

それは、生徒たちに、ある考え方の原則を示して、その原則が必要な時に引き出せるようにトレーニングする、という手法です。全体像を示すのは紙面の都合上難しいかもしれませんが、いつか、投稿にチャレンジしたいと思います。

《参考文献》

[1] 「数学Ⅲ」数研出版(2023)

(宮城県仙台第二高等学校)