

# 関数が極値をもつための条件

むらなか しょうと  
村中 翔人

## §1. 極値の定義

参考文献[1]に、極小値の定義は、次のように書いてあります。

連続な関数  $f(x)$  が、 $x=a$  を境目として減少から増加に移るとき、 $f(x)$  は  $x=a$  で極小であるといい、 $f(a)$  を極小値という。

極大値についても同様です。ここでは省略します。多くの高校生は、このような定義で数学をすると思いますが、大人の中には、次の定義で数学をする人も多いのではないのでしょうか。

関数  $f(x)$  が  $x=a$  で極小であるとは、ある  $\delta > 0$  が存在して  $0 < |x-a| < \delta$  となるすべての点  $x$  に対し  $f(a) < f(x)$  となることである。この  $f(a)$  を極小値という。

適用範囲も、連続関数に限らず、参考文献[1]の定義を含んだものとなっています。本稿では、初めの定義を高校流、後に書いた定義を大人流と呼ぶことにします。

## §2. 関数が極値をもつための条件

高校生に数学を教えるようになって、2年が経ちました。2025年度、人生で初めて数学Ⅲの授業を担当するというので、気合いを入れて予習をしていると、次のような【問題】に出会いました。

【問題】(参考文献[2] p.167 基本例題 95(2) 改)  
 $a$  は定数とする。関数

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+a}$$

について、 $f(x)$  が極値をもつような  $a$  の値の範囲を求めよ。

問題集や参考書では、例えば、「 $f(x)$  が極値をもつ  $\iff f'(x)$  が符号変化する ……(\*)」などと説明

されています。もちろん、 $f(x)$  の微分可能性は、仮定しています。

私は、高校生の頃、この説明を聞いて「確かにそうだ」と納得しました。実際、高校生に教えるときにも、このように教えて何の問題ありません。しかし、大人になった私は、高校数学ではあまり扱わない関数でも、(\*)は必ず成り立つのか、気になりました。実際、家にあった本を漁ると、参考文献[3]で、すぐに反例が見つかりました。

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left( \sin \frac{1}{x} + 2 \right) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

と定めます。まず、この関数は、 $x=0$  で微分可能(したがって連続)です。実際

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \left( \sin \frac{1}{x} + 2 \right) = 0$$

と、微分係数が定まります。そして、大人流の極小値の定義を考えれば、 $x \neq 0$  では  $f(x) > 0$  であることから、 $x=0$  で極小となります。

では、この関数は、 $x=0$  の前後で、導関数の符号が負から正に変化するのでしょうか。微分してみると、 $x \neq 0$  では

$$f'(x) = 2x \left( \sin \frac{1}{x} + 2 \right) - \cos \frac{1}{x} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

となり、これは、 $x=0$  の付近で、限りなく符号変化を繰り返します。第1項の影響はほとんどなく、第2項が、 $f'(x)$  の符号を決めています。よって、

「 $f(x)$  が極値をもつ  $\iff f'(x)$  が符号変化する」は、「 $\implies$ 」が正しくなかったということになります。

そもそも、この関数は、高校流の定義では、 $x=0$  で極小値をとりません(そういう定義だからです)。その意味では「 $\implies$ 」も、正しいことになります(仮定が偽である命題は、結論の真偽に関わらず、全体の命題が真)。よって、高校生に教える上では、全く気にする必要がないことです。しかし、大人流

の定義が書いてある高校数学の参考書もありますし、大人流の定義で数学をしている高校生もいるでしょうから、このままではスッキリしません。答案で、安心して(\*)を用いるために、(\*)が成り立つための条件は何か、調べてみました。

### §3. 導関数が連続なら(\*)が成り立つ？

初めに書きますと、本稿では、残念ながら(\*)が成り立つための必要十分条件までは追えていません。必要性は難しいため、「(\*)が成り立つために、元の関数に追加すべき仮定は何か」と、十分条件だけを追うことにしました。

①を見ると、 $f'(x)$ は $x=0$ において連続ではありません。ここから、最初は「導関数が連続であるという仮定を追加すればよいのでは？」と考えました。しかし、それは、次の関数が反例となります。

$$g(x) = \begin{cases} x^4 \left( \sin \frac{1}{x} + 2 \right) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

この例は、①の第2項に、 $x$ を掛けておきたいという気持ちから出てきます。確かめてみましょう。まず、(大人流の定義で) $x=0$ で極小となることはよいでしょう。先ほどの関数と、少しも変わりありません。また、ここでは、大人流の定義において、 $\delta=1$ としておきます。この $\delta$ は、後で使います。

連続性を確かめます。 $x \neq 0$ においては

$$g'(x) = 4x^3 \left( \sin \frac{1}{x} + 2 \right) - x^2 \cos \frac{1}{x}$$

となります。また

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x^3 \left( \sin \frac{1}{x} + 2 \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるので、 $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = g'(0)$ が成り立ちます。したがって、 $g'(x)$ は $x=0$ で連続(もちろん、他の点でも連続)です。

続いて、この関数が「 $x=0$ で極小値をとるが、導関数はその前後で符号が負から正にならないこと」を確かめていきます。そのためには、0よりほんの少し小さい $x$ で、 $g'(x) > 0$ となる瞬間があることを示せば十分です。先ほど述べたように、 $\delta=1$ としておきます。 $n$ を自然数として、

$x_n = -\frac{1}{(2n-1)\pi}$ と定めれば、これは $0 < |x_n| < \delta$ を満たし

$$\begin{aligned} g'(x_n) &= 4 \left\{ -\frac{1}{(2n-1)\pi} \right\}^3 \cdot (0+2) \\ &\quad - \left\{ -\frac{1}{(2n-1)\pi} \right\}^2 \cdot (-1) \\ &= \frac{1}{(2n-1)^2 \pi^2} \left\{ -\frac{8}{(2n-1)\pi} + 1 \right\} \end{aligned}$$

となります。 $n$ を $\frac{8}{(2n-1)\pi} < 1$ 、すなわち、

$\frac{4}{\pi} + \frac{1}{2} < n$ となるようにとれば、 $g'(x_n) > 0$ となり、これで、 $g(x)$ が(\*)の「 $\implies$ 」の反例であることが示せました。

### §4. (\*)が成り立つための十分条件の1つ

では、「第1次ではなく第2次導関数が連続であればよいのか？」などという考えも頭を巡りますが、この調子でいくと、おそらく上手くいきません。やはり、導関数が振動するのが、悩みのタネなわけです。そこで、少しズルい(?)とは思いましたが、「導関数が連続で、かつ零点で孤立している」という仮定を追加することにしました。しっかりと、用語を定義するところから参りましょう。

$x=a$ が関数 $f(x)$ の孤立した零点であるとは、 $f(a)=0$ であり、ある $\delta > 0$ が存在して、 $0 < |x-a| < \delta$ となるすべての $x$ に対して $f(x) \neq 0$ となることである。

これで、次の【命題】が成り立ちます。

#### 【命題】

関数 $f(x)$ は微分可能かつ導関数 $f'(x)$ が連続で、 $f'(x)$ の零点は孤立した零点であるとする。このとき、 $f(x)$ が $x=a$ で極小となるならば、ある $\delta > 0$ が存在して、「任意の $x \in (a-\delta, a)$ に対して $f'(x) < 0$ かつ任意の $x \in (a, a+\delta)$ に対して $f'(x) > 0$ 」となる。

主張の後半は、 $f'(x)$ の符号が、負から正に変わると言っているだけです。極小の場合についてしか述べていませんが、極大の場合についても同様です。では、証明していきましょう。

**証明**  $x \in (a - \delta, a)$  で  $f'(x) < 0$  となることを示す。 $x = a$  で極小となるとき、ある  $\delta' > 0$  が存在して、 $0 < |x - a| < \delta'$  となるすべての  $x$  に対し  $f(a) < f(x)$  となる。 $x = a$  は  $f'(x)$  の孤立した零点であるから、 $x \in (a - \delta, a)$  を、 $(x, a)$  内に  $f'(x)$  の零点がないようにとれる。 $f(a) < f(x)$  かつ  $x < a$  であるから、平均値の定理により、ある  $s \in (x, a)$  が存在して、 $f'(s) = \frac{f(a) - f(x)}{a - x} < 0$  となる。 $f'(x)$  は連続であるから、 $x \in (s, a)$  に対して、 $f'(x) < 0$  となる。

$x \in (a, a + \delta)$  で  $f'(x) > 0$  となることについても同様で、 $x \in (a, s')$  に対して、 $f'(x) > 0$  となる  $s'$  が存在する。

$\delta = \min\{|a - s|, |a - s'|\}$  とおけば、結論を得る。

**証明終**

一応、 $x = a$  が  $f'(x)$  の零点であるという部分で「微分可能な関数  $f(x)$  が  $x = a$  で極値をとるならば、 $f'(a) = 0$ 」を用いています。これは、高校生にもよく知られた事実でしょう。

## §5. 終わりに

これを調べた後、いくつか問題を見ましたが、【命題】の仮定を満たさない関数について、極値をとる条件を調べさせる問題は見つかりませんでした。これで、ひとまずは、安心して(\*)を答案に書くことができそうです。もし、【命題】の仮定を満たさない関数に問題の中で出会ったときには、また、この話題に頭を悩ませようと思います。

### 《参考文献》

- [1] 「新編 数学Ⅲ」数研出版(2023)
- [2] 「新課程 チャート式 基礎からの数学Ⅲ+C [ベクトル, 複素数平面, 式と曲線]」数研出版(2023)
- [3] 長岡亮介 著「総合的研究 数学Ⅲ」旺文社(2014)

(石川県立穴水高等学校)