

加法定理を満たす実数値関数

さわはた 澤幡
みちまさ 通正

§1. はじめに

三角関数 $\cos x$, $\sin x$ については加法定理が成立するが、逆に加法定理を満たす関数はどのようなものがあるだろうか。

(類 2023 九州大学)

このような文章から、九州大学の2023年度前期理系の入試問題の第4問は始まっている。実際に出題された問題は、参考文献[1]に記載した書籍で確認することができる。その問題の前半は、要約すれば、次の【定理1】としてまとめることができる。

【定理1】

実数全体を定義域とする実数値関数 $f(x)$, $g(x)$ が次の条件を満たすとする。

- (1) すべての x, y について $f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$
- (2) すべての x, y について $g(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$
- (3) $f(0) \neq 0$
- (4) $f(x)$, $g(x)$ は $x=0$ で微分可能で $f'(0)=0$, $g'(0)=1$

このとき、(1), (2), (3), (4) を満たす関数は三角関数 $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$ である。

(類 2023 九州大学)

ここでは、上の【定理1】で漏れた分母を0にする実数を除いた定義域を持ち、さらに、加法定理を満たす実数値関数の決定問題の解答を示すことにする。結論から言えば、次の【定理2】で解決している。なお、加法定理は【定理2】の(1)のように定式化する。

§2. 【定理2】とその証明

【定理2】

分母を0にする実数を除いた定義域を持つ実数値関数 $f(x)$ が次の条件を満たすとする。

- (1) すべての x, y について $f(x)f(y) \neq 1$ で

$$\text{あり, } f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$$

- (2) $f(0)=0$
- (3) $f(x)$ は $x=0$ で微分可能で $f'(0)=1$

このとき、(1), (2), (3) を満たす関数は三角関数 $f(x) = \tan x$ である。

(類 2023 九州大学)

【証明】

(1)より

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{f(x)+f(h)}{1-f(x)f(h)} - f(x) \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{f(x)+f(h)-f(x)\{1-f(x)f(h)\}}{1-f(x)f(h)} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} \left[\frac{1+\{f(x)\}^2}{1-f(x)f(h)} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} \left[\frac{1+\{f(x)\}^2}{1-f(x)f(h)} \right] \end{aligned}$$

ここで、(3)より、 $f(x)$ は $x=0$ で微分可能であるから、 $x=0$ で連続である。

よって、 $\lim_{h \rightarrow 0} f(h) = f(0) = 0$ であるから

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} \left[\frac{1+\{f(x)\}^2}{1-f(x)f(h)} \right] \\ &= f'(0)[1+\{f(x)\}^2] = 1+\{f(x)\}^2 \end{aligned}$$

ここで、 $y = f(x)$ とおくと

$$y' = 1+y^2$$

$1+y^2 \neq 0$ であるから

$$\int \frac{1}{1+y^2} dy = \int dx \quad \dots\dots ①$$

①の左辺について、 $y=\tan\theta$ とおくと、 $\theta\neq\frac{\pi}{2}+n\pi$

(n は整数) のとき

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

であるから

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{1+y^2} dy \\ &= \int \frac{1}{1+\tan^2\theta} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta \\ &= \int d\theta \end{aligned}$$

①より

$$\int d\theta = \int dx$$

であるから

$$\theta = x + C \quad (\text{ただし, } C \text{ は積分定数})$$

ここで、(2)より、 $x=0$ のとき $y=0$ であり、
 $y=\tan\theta$ より、 $y=0$ のとき、 $\theta=n\pi$ (n は整数)
 であるから

$$C = n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

よって、 $\theta = x + n\pi$ (n は整数) のとき

$$\tan\theta = \tan(x + n\pi) = \tan x$$

であるから、 $\tan\theta = y = f(x)$ より、条件(1), (2), (3)
 を満たす関数は、三角関数 $f(x) = \tan x$ である。

以上、【定理1】と【定理2】を合わせれば、実数
 全体を定義域とする実数値関数で加法定理を満たす
 のは、正弦関数、余弦関数、正接関数の3種類であ
 ることが分かったわけである。ただし、正接関数の
 場合は、分母が0になるところを除いて定義域とす
 ることは必要である。

もちろん、この結果は、一般的なものではなく
 【定理1】では条件(4)、【定理2】では条件(3)のも
 とでの事実である。

実際、九州大学の元の問題の後半は、【定理1】の
 条件(4)を一般的にしたもの、つまり

$$\begin{aligned} & a, b \text{ を実数で } b \neq 0 \text{ とする。} f(x), g(x) \text{ は} \\ & x=0 \text{ で微分可能で } f'(0)=a, g'(0)=b \\ & \hspace{15em} (\text{類 } 2023 \text{ 九州大学}) \end{aligned}$$

の解答として

$$f(x) = e^{ax} \cos bx, \quad g(x) = e^{ax} \sin bx$$

を要求している。

ここでは、【定理2】の条件(3)を一般的にしたもの
 を、次の【作問例】として採り上げる。

§3. 作問例

【作問例】

ある日、花子さんと太郎さんのクラスでは、数学
 の授業で次のような課題が出された。次の会話は、
 共同して解くために、放課後に交わされたものであ
 る。

【課題】

分母を0にする実数を除いた定義域を持つ実
 数値関数 $f(x)$ が次の条件を満たすとする。

(1) すべての x, y について $f(x)f(y) \neq 1$ で

$$\text{あり, } f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$$

(2) $f(0)=0$

(3) $f(x)$ は $x=0$ で微分可能で $f'(0)=a$

このとき、(1), (2), (3)を満たす関数 $f(x)$ を
 求めよ。 (類 2023 九州大学)

太郎：条件(1)の形から、正接関数 $f(x) = \tan x$ が
 思い浮かぶが、これは条件(3)を満たしていな
 いしなあ。

花子：それなら、 $f(x) = \tan ax$ とすればいいので
 是。

太郎：なるほど。必要性は示せたが、十分性が残っ
 ているね。

花子：そうね。条件(1)と(2)は手のつけようがない
 から、条件(3)から始めるべきでしょう。しか
 も、関数が微分可能であることの定義に戻る
 必要がありそう。

太郎： $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ に、条件(1)の結

果を代入して整理すればよいから

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} \left[\frac{1 + \{f(x)\}^2}{1 - f(x)f(h)} \right]$$

となるよ。

花子：[] 内の式は、条件(3)より $f(x)$ は $x=0$ で
 微分可能であるから、 $x=0$ で連続であるこ
 とが分かる。すると、 $\lim_{h \rightarrow 0} f(h) = f(0) = 0$ と
 なるよね。

太郎： $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h}$ の部分は、条件(2)の $f(0)=0$ を使

$$\text{って } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0)$$

とできるよ。

花子：結局，条件(1)，(2)，(3)より

$$f'(x)=a[1+\{f(x)\}^2]$$

が得られるわよ。

太郎：この形の微分方程式は，定数 a が 1 の場合を
授業で学習したことがあるから，その解は，

$$f(x)=\tan ax \text{ と求められるよ。}$$

花子：これで十分性も示せたね。

《参考文献》

- 〔1〕 「2023 数学Ⅲ入試問題集」数研出版(2023)
(茨城県 水戸葵陵高等学校)