数列の公式 OSF

大田(おおた)　康介(こうすけ)

§1. はじめに

本稿では，漸化式から一般項を求めることを，「**漸化式を解く**」と呼ぶことにする。今回は，数列の公式

OSF＝Ota's sequence formula

を紹介する。基本的な漸化式

$$a_{n+1}=pa_n+A \qquad \cdots\cdots ①$$

あるいは

$$a_{n+1}=pa_n+Aq^n \qquad \cdots\cdots ②$$

の一般化公式である。生徒に覚えさせたい程の公式ではないが，計算方法を考察することには価値がある。紹介の目的は，通常授業で生徒が悩みながら取り組める問題の提案である。

さて，ネーミングセンスには目を瞑ってもらうことにして，早速公式を提示する。

> **【OSF】**
>
> p は 0 ではない定数とする。
>
> 定数 q_1，q_2，……，q_m $(m\geqq 1)$ は，p，0 とは異なるとする。
>
> 定数 A_1，A_2，……，A_m $(m\geqq 1)$ は，0 ではないとする。
>
> このとき，漸化式
>
> $$a_{n+1}=pa_n+\sum_{k=1}^{m}A_k{q_k}^n$$
>
> で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項は
>
> $$a_n=p^{n-1}\left(a_1-\sum_{k=1}^{m}\frac{A_kq_k}{q_k-p}\right)+\sum_{k=1}^{m}\frac{A_k{q_k}^n}{q_k-p}$$
>
> で与えられる。

証明は§3で見る。

【例 1.1】

OSF において $p\neq 1$，$m=1$，$q_1=1$ のとき，漸化式は①と同じ形であるが，その一般項は

$$a_n=p^{n-1}\left(a_1-\frac{A_1}{1-p}\right)+\frac{A_1}{1-p}$$

である。

【例 1.2】

漸化式②を OSF の条件の下で解くと

$$a_n=p^{n-1}\left(a_1-\frac{Aq}{q-p}\right)+\frac{Aq^n}{q-p}$$

となる。

§2. OSF の例

OSF の利用例を簡単に紹介する。

【例 2.1】

漸化式 $a_{n+1}=2a_n+3^n$ を解くと

$$a_n=2^{n-1}\left(a_1-\frac{3}{3-2}\right)+\frac{3^n}{3-2}$$
$$=2^{n-1}(a_1-3)+3^n$$

を得る。

【例 2.2】

漸化式 $a_{n+1}=2a_n+3^n+4$ を解くと

$$a_n=2^{n-1}\left(a_1-\frac{3}{3-2}-\frac{4}{1-2}\right)+\frac{3^n}{3-2}+\frac{4}{1-2}$$
$$=2^{n-1}(a_1+1)+3^n-4$$

を得る。

【例 2.3】

漸化式 $a_{n+1}=2a_n+3^n+5^n$ を解くと

$$a_n=2^{n-1}\left(a_1-3-\frac{5}{3}\right)+3^n+\frac{5^n}{3}$$
$$=2^{n-1}\left(a_1-\frac{14}{3}\right)+3^n+\frac{5^n}{3}$$

を得る。

【例 2.4】

漸化式 $a_{n+1}=2a_n+3^n+5^n+6^n$ を解くと

$$a_n=2^{n-1}\left(a_1-\frac{3}{3-2}-\frac{5}{5-2}-\frac{6}{6-2}\right)+3^n+\frac{5^n}{3}+\frac{6^n}{4}$$
$$=2^{n-1}\left(a_1-\frac{37}{6}\right)+3^n+\frac{5^n}{3}+\frac{6^n}{4}$$

を得る。

【例 2.5】

漸化式 $a_{n+1}=2a_n+2\cdot 3^{2n}+5^{n+1}$ を変形して

$$a_{n+1}=2a_n+2\cdot 9^n+5\cdot 5^n$$

これを解くと

$$a_n=2^{n-1}\left(a_1-\frac{9}{9-2}\cdot 2-\frac{5}{5-2}\cdot 5\right)+\frac{2\cdot 9^n}{7}+\frac{5\cdot 5^n}{3}$$

$$=2^{n-1}\left(a_1-\frac{229}{21}\right)+\frac{2\cdot 9^n}{7}+\frac{5^{n+1}}{3}$$

を得る。

【例 2.6】

漸化式 $a_{n+1}=2a_n+2^n+3^n$ の両辺を 2^n で割って

$$\frac{a_{n+1}}{2^n}=\frac{a_n}{2^{n-1}}+1+\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

となる。元の漸化式も，変形後も，OSF の前提条件に当てはまらないが，変形後は階差数列 $\left\{\frac{a_{n+1}}{2^n}-\frac{a_n}{2^{n-1}}\right\}$ の一般項を表していて，簡単に解決する。

§3. OSF の証明

この節では，OSF の数学的帰納法による証明 [1] と，直接的計算 [2]，愚直に計算する方法 [3] を眺める。

【OSF の証明】

[1] 数学的帰納法

一般項が

$$a_n=p^{n-1}\left(a_1-\sum_{k=1}^{m}\frac{A_kq_k}{q_k-p}\right)+\sum_{k=1}^{m}\frac{A_kq_k{}^n}{q_k-p} \quad \cdots\cdots ☆$$

となることを，n についての数学的帰納法で証明する。

$n=1$ のとき，☆の右辺は明らかに a_1 である。

☆が n まで正しいとする。

漸化式 $a_{n+1}=pa_n+\sum_{k=1}^{m}A_kq_k{}^n$ の右辺に☆を代入すると

$$a_{n+1}=p^n\left(a_1-\sum_{k=1}^{m}\frac{A_kq_k}{q_k-p}\right)+p\sum_{k=1}^{m}\frac{A_kq_k{}^n}{q_k-p}+\sum_{k=1}^{m}A_kq_k{}^n$$

$$=p^n\left(a_1-\sum_{k=1}^{m}\frac{A_kq_k}{q_k-p}\right)+\sum_{k=1}^{m}\frac{A_kq_k{}^{n+1}}{q_k-p}$$

より，$n+1$ でも☆は正しい。 終

[2] 直接的計算

漸化式の両辺を p^n で割って

$$\frac{a_{n+1}}{p^n}-\frac{a_n}{p^{n-1}}=\sum_{k=1}^{m}A_k\left(\frac{q_k}{p}\right)^n$$

とすると，$n\geqq 2$ のとき

$$\frac{a_n}{p^{n-1}}=a_1+\sum_{t=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{m}A_k\left(\frac{q_k}{p}\right)^t$$

$$=a_1+\sum_{k=1}^{m}\sum_{t=1}^{n-1}A_k\left(\frac{q_k}{p}\right)^t$$

$$=a_1+\sum_{k=1}^{m}\frac{\frac{q_k}{p}\left\{\left(\frac{q_k}{p}\right)^{n-1}-1\right\}}{\frac{q_k}{p}-1}A_k$$

$$=a_1+\sum_{k=1}^{m}\frac{\frac{q_k{}^n}{p^{n-1}}-q_k}{q_k-p}A_k$$

となる。よって

$$a_n=p^{n-1}a_1+\sum_{k=1}^{m}\frac{q_k{}^n-q_kp^{n-1}}{q_k-p}A_k$$

すなわち

$$a_n=p^{n-1}\left(a_1-\sum_{k=1}^{m}\frac{A_kq_k}{q_k-p}\right)+\sum_{k=1}^{m}\frac{A_kq_k{}^n}{q_k-p}$$

この右辺は，$n=1$ のとき，明らかに a_1 であるから，$n=1$ でも成り立つ。 終

[3] 愚直に計算する方法（m が小さい時）

パターン 1：$a_{n+1}=pa_n+Aq^n+B$ $(p\neq 1)$

$x=px+B$ を x について解くと

$$x=\frac{B}{1-p}$$

よって，$a_{n+1}=pa_n+Aq^n+B$ と $x=px+B$ の辺々を引くと

$$a_{n+1}-\frac{B}{1-p}=p\left(a_n-\frac{B}{1-p}\right)+Aq^n$$

を得る。両辺を $q^n\neq 0$ で割ることにより

$$\frac{1}{q^n}\left(a_{n+1}-\frac{B}{1-p}\right)=\frac{p}{q}\cdot\frac{1}{q^{n-1}}\left(a_n-\frac{B}{1-p}\right)+A$$

となる。$y=\frac{p}{q}y+A$ を y について解くと

$$y=\frac{Aq}{q-p}$$

であるから

$$\frac{1}{q^n}\left(a_{n+1}-\frac{B}{1-p}\right)-\frac{Aq}{q-p}$$

$$=\frac{p}{q}\left\{\frac{1}{q^{n-1}}\left(a_n-\frac{B}{1-p}\right)-\frac{Aq}{q-p}\right\}$$

を得る。

したがって

$$\frac{1}{q^{n-1}}\left(a_n-\frac{B}{1-p}\right)-\frac{Aq}{q-p}$$
$$=\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}\left(a_1-\frac{B}{1-p}-\frac{Aq}{q-p}\right)$$

となり，両辺に q^{n-1} を掛けて

$$a_n-\frac{B}{1-p}-\frac{Aq^n}{q-p}$$
$$=p^{n-1}\left(a_1-\frac{Aq}{q-p}-\frac{B}{1-p}\right)$$

すなわち

$$a_n=p^{n-1}\left(a_1-\frac{Aq}{q-p}-\frac{B}{1-p}\right)+\frac{Aq^n}{q-p}+\frac{B}{1-p}$$

を得る。 終

パターン 2：$\boldsymbol{a_{n+1}=pa_n+Aq^n+Br^n}$

漸化式の両辺を $q^n\neq 0$ で割って

$$\frac{a_{n+1}}{q^n}=\frac{p}{q}\cdot\frac{a_n}{q^{n-1}}+A+B\left(\frac{r}{q}\right)^n$$

$x=\dfrac{p}{q}x+A$ を x について解くと

$$x=\frac{Aq}{q-p}$$

である。よって，与えられた漸化式は

$$\frac{a_{n+1}}{q^n}-\frac{Aq}{q-p}=\frac{p}{q}\left(\frac{a_n}{q^{n-1}}-\frac{Aq}{q-p}\right)+B\left(\frac{r}{q}\right)^n$$

と変形できる。両辺を $\left(\dfrac{r}{q}\right)^n\neq 0$ で割って

$$\left(\frac{q}{r}\right)^n\left(\frac{a_{n+1}}{q^n}-\frac{Aq}{q-p}\right)$$
$$=\frac{p}{r}\cdot\left(\frac{q}{r}\right)^{n-1}\left(\frac{a_n}{q^{n-1}}-\frac{Aq}{q-p}\right)+B$$

となる。$y=\dfrac{p}{r}y+B$ を y について解くと

$$y=\frac{Br}{r-p}$$

である。すべての n について

$$b_n=\left(\frac{q}{r}\right)^{n-1}\left(\frac{a_n}{q^{n-1}}-\frac{Aq}{q-p}\right)$$

とおくと

$$b_{n+1}-\frac{Br}{r-p}=\frac{p}{r}\left(b_n-\frac{Br}{r-p}\right)$$

であって

$$b_n-\frac{Br}{r-p}=\left(\frac{p}{r}\right)^{n-1}\left(b_1-\frac{Br}{r-p}\right)$$

を得る。

ここで，両辺に r^{n-1} を掛けると

$$r^{n-1}b_n-\frac{Br^n}{r-p}=p^{n-1}\left(b_1-\frac{Br}{r-p}\right)$$

であり

$$r^{n-1}b_n=a_n-\frac{Aq^n}{q-p},\quad b_1=a_1-\frac{Aq}{q-p}$$

を代入すれば

$$a_n-\frac{Aq^n}{q-p}-\frac{Br^n}{r-p}$$
$$=p^{n-1}\left(a_1-\frac{Aq}{q-p}-\frac{Br}{r-p}\right)$$

となる。したがって

$$a_n=p^{n-1}\left(a_1-\frac{Aq}{q-p}-\frac{Br}{r-p}\right)+\frac{Aq^n}{q-p}+\frac{Br^n}{r-p}$$

を得る。 終

§4. 教育的視点

直接的計算 [2] は [3] と比べれば現実的である。これを考慮すれば，② を

$$\frac{a_{n+1}}{q^n}=\frac{p}{q}\left(\frac{a_n}{q^{n-1}}\right)+A \qquad \cdots\cdots ②'$$

に加えて

$$\frac{a_{n+1}}{p^n}=\frac{a_n}{p^{n-1}}+A\left(\frac{q}{p}\right)^n \qquad \cdots\cdots ②''$$

と変形する解法を学ぶことも必要である。また，この流れで数列 $\{a_n\}$ と $\{c_n\}$ を用いた漸化式

$$a_{n+1}=pa_n+c_n$$

から a_n を求めるとき，$\dfrac{a_{n+1}}{p^n}=\dfrac{a_n}{p^{n-1}}+\dfrac{c_n}{p^n}$ と変形する方法を知るのにも都合がよい。

【例 2.2】～**【例 2.5】**は，生徒にとって取り組みやすい問題演習になると思う(OSF によって解くのではなく)。問題集や入試で，これらの漸化式を単純に解かせる問題を目にした記憶はないので，② を ②′ の方針で学んだ後に取り組ませてみると，生徒は試行錯誤するかもしれない。その後に，一般化として OSF を見せればよい。

漸化式は，解法伝授の教育になる傾向が強いため，生徒が悩みながら取り組めるよい機会へと繋げたい。

§5. 最後に

公式 OSF が他の漸化式に対して意味を成す場合はもちろんあるが，別の機会で紹介したい。