プログラミングと漸化式による
ピタゴラス数の考察

木村　嘉宏（きむら　よしひろ）

§1. はじめに

$X^2+Y^2=Z^2$ を満たす自然数の組 X, Y, Z を**ピタゴラス数**と言う。ピタゴラス数は，Z を斜辺とする直角三角形の 3 辺の長さでもある。

高校生の探究活動の題材になればと考え，一定の条件を満たすピタゴラス数(直角三角形)について調べてみる。

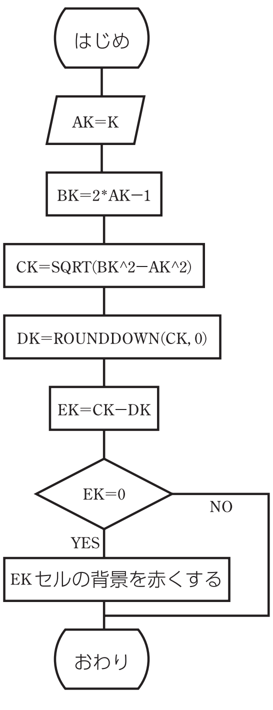
以降，簡単のため，X, Y, Z がピタゴラス数であるとき，$(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y},\ \boldsymbol{Z})$ と表すことにする。ただし，$X<Y<Z$ とする。

§2. $Z=2X-1$ のとき

(3, 4, 5) のように，$Z=2X-1$ を満たす場合を考察してみる。この条件を満たしつつ X を限りなく大きくすれば，X, Y, Z の比は限りなく $1:\sqrt{3}:2$ に近づく。

高校で 1 人 1 台端末が定着し，プログラミングについても学習していることを踏まえ，表計算ソフト(エクセル)を活用する一例を示す。

- k を自然数とする。
- Ak のセルに k を入力する。
- $Bk=2Ak-1$ とする。
- $Ck=\sqrt{Bk^2-Ak^2}$ とする。
- Ck の小数点以下を切り捨て，Dk とする。
- $Ek=Ck-Dk$ とする。
- $Ek=0$ であれば，Ek のセルの背景を赤くする。



Ak, Ck, Bk は，相互の関係により，必ず $Bk=2Ak-1$ と $Ak^2+Ck^2=Bk^2$ が成り立つが，Ck が整数になるとは限らない。Ck が小数部分をもたない，すなわち Ck が整数の場合のみ，$Ck=Dk$ すなわち $Ek=0$ となるので，Ek のセルの背景が赤く表示される。このとき，Ak, Ck, Bk が自然数であれば，$(Ak,\ Ck,\ Bk)$ で $Bk=2Ak-1$ を満たす。

$Z=2X-1$, $X^2+Y^2=Z^2$ を満たすような自然数 X, Y, Z として，(3, 4, 5), (33, 56, 65), (451, 780, 901) がある。

これら相互の関係を調べてみる。

ピタゴラス数は，2 つの自然数 a, b により a^2-b^2, $2ab$, a^2+b^2 と表せる。上の 3 例の場合は，次の表の通りである。

X	Y	Z	a	b
3	4	5	2	1
33	56	65	7	4
451	780	901	26	15

$(X,\ Y,\ Z)=(a^2-b^2,\ 2ab,\ a^2+b^2)$

§3. 漸化式の導入

§2 で示した表について，上から第 n 行目の数を左から順に $\boldsymbol{X_n}$, $\boldsymbol{Y_n}$, $\boldsymbol{Z_n}$, $\boldsymbol{a_n}$, $\boldsymbol{b_n}$ とすると

$$b_2=a_1+2b_1,\quad b_3=a_2+2b_2$$
$$a_2=a_1+b_1+b_2,\quad a_3=a_2+b_2+b_3$$

が成り立つ。

$a_2=2a_1+3b_1$, $a_3=2a_2+3b_2$ であるから，§2 で示した表について

$$a_1=2,\quad b_1=1$$
$$a_{k+1}=2a_k+3b_k,\quad b_{k+1}=a_k+2b_k\quad (k=1,\ 2)$$

が成り立つ。この漸化式に $k=3$, 4, 5 を代入し，表を拡張させると

n	X_n	Y_n	Z_n	a_n	b_n
1	3	4	5	2	1
2	33	56	65	7	4
3	451	780	901	26	15
4	6273	10864	12545	97	56
5	87363	151316	174725	362	209
6	1216801	2107560	2433601	1351	780

$(X_n,\ Y_n,\ Z_n)=(a_n{}^2-b_n{}^2,\ 2a_nb_n,\ a_n{}^2+b_n{}^2)$

表の範囲 $(n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$ において，$Z_n=2X_n-1$，$X_n{}^2+Y_n{}^2=Z_n{}^2$ が成立する。

§4. すべての自然数 n についての証明

さらに，表を拡張した場合を考察する。

$(a_n{}^2-b_n{}^2)^2+(2a_nb_n)^2=(a_n{}^2+b_n{}^2)^2$ は恒等式であるから，$X_n{}^2+Y_n{}^2=Z_n{}^2$ は常に成立する。

すべての自然数 n について，$Z_n=2X_n-1$ $(2X_n-Z_n=1)$ が成立することを，数学的帰納法によって証明する。

証明

［1］ $n=1$ のとき　$2X_1-Z_1=2\cdot3-5=1$

［2］ $n=k$ のとき $2X_k-Z_k=1$ と仮定すると

$$\begin{aligned}2X_k-Z_k&=2(a_k{}^2-b_k{}^2)-(a_k{}^2+b_k{}^2)\\&=a_k{}^2-3b_k{}^2\\&=1\end{aligned}$$

$n=k+1$ のときを考えると

$$\begin{aligned}&2X_{k+1}-Z_{k+1}\\&=2(a_{k+1}{}^2-b_{k+1}{}^2)-(a_{k+1}{}^2+b_{k+1}{}^2)\\&=a_{k+1}{}^2-3b_{k+1}{}^2\\&=(2a_k+3b_k)^2-3(a_k+2b_k)^2\\&=a_k{}^2-3b_k{}^2=1\end{aligned}$$

［1］，［2］から，すべての自然数 n について $2X_n-Z_n=1$ は成立する。　**証明終**

§5. 一般項の考察

$a_1=2,\ b_1=1$

$a_{n+1}=2a_n+3b_n$　……①

$b_{n+1}=a_n+2b_n$　……②　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

から，数列 $\{a_n\}$ 及び $\{b_n\}$ の一般項を求めてみる。

①より　$b_n=\dfrac{a_{n+1}-2a_n}{3}$，$b_{n+1}=\dfrac{a_{n+2}-2a_{n+1}}{3}$

これらを②に代入すると

$$\frac{a_{n+2}-2a_{n+1}}{3}=a_n+\frac{2(a_{n+1}-2a_n)}{3}$$

両辺を3倍すると

$$a_{n+2}-2a_{n+1}=3a_n+2(a_{n+1}-2a_n)$$

よって

$$a_{n+2}-4a_{n+1}+a_n=0 \qquad \cdots\cdots ③$$

適当な α，β により，③が

$$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$$
$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$$

と表せるとき

$$\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=1$$

α，β は，2次方程式 $x^2-4x+1=0$ の解であるから，$\alpha=2+\sqrt{3}$，$\beta=2-\sqrt{3}$ とすると

$$a_2-\beta a_1=7-2\beta=3+2\sqrt{3}=\sqrt{3}\,\alpha$$
$$a_2-\alpha a_1=7-2\alpha=3-2\sqrt{3}=-\sqrt{3}\,\beta$$

ゆえに

$$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha^n(a_2-\beta a_1)=\sqrt{3}\,\alpha^{n+1}$$
$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta^n(a_2-\alpha a_1)=-\sqrt{3}\,\beta^{n+1}$$

2式の差をとると

$$(\alpha-\beta)a_{n+1}=\sqrt{3}(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})$$

$\alpha-\beta=2\sqrt{3}$ であるから　$a_{n+1}=\dfrac{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}{2}$

したがって，$n\geqq2$ のとき　$a_n=\dfrac{\alpha^n+\beta^n}{2}$

これは，$n=1$ のときにも成り立つ。

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{a_{n+1}-2a_n}{3}\\&=\frac{\dfrac{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}{2}-(\alpha^n+\beta^n)}{3}\\&=\frac{\alpha^n(\alpha-2)+\beta^n(\beta-2)}{6}\\&=\frac{\sqrt{3}(\alpha^n-\beta^n)}{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X_n&=a_n{}^2-b_n{}^2\\&=\frac{\alpha^{2n}+2(\alpha\beta)^n+\beta^{2n}}{4}-\frac{\alpha^{2n}-2(\alpha\beta)^n+\beta^{2n}}{12}\\&=\frac{\alpha^{2n}+2+\beta^{2n}}{4}-\frac{\alpha^{2n}-2+\beta^{2n}}{12}\\&=\frac{\alpha^{2n}+\beta^{2n}}{6}+\frac{2}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Y_n&=2a_nb_n\\&=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}(\alpha^{2n}-\beta^{2n})\\&=\frac{\sqrt{3}(\alpha^{2n}-\beta^{2n})}{6}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Z_n &= {a_n}^2 + {b_n}^2 \\
&= \frac{\alpha^{2n}+2+\beta^{2n}}{4} + \frac{\alpha^{2n}-2+\beta^{2n}}{12} \\
&= \frac{\alpha^{2n}+\beta^{2n}+1}{3}
\end{aligned}
$$

§6. $\sqrt{3}$ の近似値

n を大きくするほど，$\dfrac{Z_n}{X_n}$ は限りなく 2 に近づき，$\dfrac{Y_n}{X_n}$ は限りなく $\sqrt{3}$ に近づく。

$X_{10}=45793063713$

$Y_{10}=79315912984$

であり

$$\frac{Y_{10}}{X_{10}}=1.7320508\cdots\cdots$$

である。

（京都府立丹後緑風高等学校）