定数を消して同次式を作ればいつでも大丈夫なのか？

内藤(ないとう)　康正(やすまさ)

§1. はじめに

次の**【問題１】**(参考文献〔１〕)に関して，前任校で数回全く同じ質問を受けました。

> **【問題１】**　実数 a，b，c，d が
> $a+2b+3c+4d=6$　……①
> $a^2+4b^2+9c^2+16d^2=12$　……②
> を満たすとき，$0\leqq a\leqq 3$ が成り立つことを証明せよ。　(類 2000 甲南大学)

その質問は「次のように解いたが，答えが合わないのはなぜか？」というものです。

> **【誤答】**
> ②－①×２から
> $a^2-2a+4b^2-4b+9c^2-6c+16d^2-8d=0$
> これを変形して
> $(a-1)^2+(2b-1)^2+(3c-1)^2+(4d-1)^2=4$
> ここで
> $(2b-1)^2\geqq 0$，$(3c-1)^2\geqq 0$，$(4d-1)^2\geqq 0$
> であるから
> $4-(a-1)^2\geqq 0$
> これを解いて
> $-1\leqq a\leqq 3$

後述のように，この問題は⑴と⑵がセットになった入試問題の⑵なのですが，⑴がヒントとは気がつかずに解いた結果の質問になります。本稿では

・誤答の理由　　・ノーヒントで解く方法

の２点を中心に，進化(？)を続けてたどり着いた筆者なりの回答の流れをまとめてみました。不等式指導のご参考になる箇所があれば幸いです。

§2.　２種類の不等式

すぐには質問そのものへの回答をせず，不等式には次の２種類があることから説明を始めます。

(A)　単なる大小関係を表す不等式

(B)　式の値のとりうる範囲を表す不等式

通常は，(B)の意味での２つの不等式，例えば

$-1\leqq\sin\theta\leqq 1$，$-1\leqq\cos\theta\leqq 1$

はうかつに辺々を加えてはいけないと指導しますが，これらを加えた不等式

$-2\leqq\sin\theta+\cos\theta\leqq 2$

も，(A)の意味では間違っていません。誤答の不等式 $-1\leqq a\leqq 3$ も成り立ってはいるが，**【問題１】**では(B)の意味での不等式が要求されていることを理解してもらいます。

ただし，問題文からはそのことが読み取りづらい。これに関して蛇足を１つ。等号付き不等式の証明問題では「等号が成り立つのはいつか」という設問が付いていますが，これはその不等式が(B)の意味での不等式であることを大前提とした表現に感じます。「等号付き不等式では等号は必ず成立する」という理解では，２次不等式 $x^2+2x+3\geqq 0$ などの指導に支障をきたします。閑話休題。

次に「$-1\leqq a\leqq 3$ は a のとりうる値の範囲を表していないこと」を確かめます。これは，①，②で $a=-1$ とすると，次のように確認ができます。

$-1+2b+3c+4d=6$　……①′

$1+4b^2+9c^2+16d^2=12$　……②′

①′と②′から b を消去すると

$1+(7-3c-4d)^2+9c^2+16d^2=12$

d について整理すると

$16d^2+4(3c-7)d+(9c^2-21c+19)=0$　……③

この２次方程式の判別式をDとすると

$$\frac{D}{4}=\cdots\cdots=-12(9c^2-14c+9)<0$$

となり，③が実数解をもちません。

§3. ノーヒントで解くには

この【問題１】の直前には次の【問題２】があり，それがヒントとなっています。

> **【問題２】** 任意の実数p，q，rに対して，不等式
>
> $$3(p^2+q^2+r^2)\geqq(p+q+r)^2$$
>
> が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。
>
> （類　2000　甲南大学）

つまり，このp，q，rに$2b$，$3c$，$4d$を代入すれば解決することを見抜く問題だったのですが，質問を寄せる生徒諸君は，このヒントを利用した解決では気が済みません。よい意味で素直でない，つまり【問題１】をノーヒントで解きたいのです。そのためには判別式を追いかけていけばよいはずですが，２つの等式を満たす４文字すべてが変数ですから骨が折れます。ここでは，途中計算を割愛して記してみます。

①，②からbを消去して

$$a^2+(6-a-3c-4d)^2+9c^2+16d^2=12$$

dについて整理して

$$16d^2+4(a+3c-6)d+(a^2+9c^2-6a-18c+3ac+12)=0$$

ここで（判別式）$\geqq0$ を計算・整理すると

$$9c^2+2(a-6)c+(a-2)^2\leqq0$$

この不等式を満たす実数cが存在することから

$$(a-6)^2-9(a-2)^2\geqq0$$

これを解いて $0\leqq a\leqq3$ です。

§4. で，何がダメなんですか？

質問の回答を待ちくたびれて「で，何がだめだったんですか？」となります。そこで，ミスの原因は計算間違いではなく論理的なミスであること，具体的には

「①と②を満たす実数a，b，c，dが存在する」

$$\Longleftrightarrow\ \cdots\cdots\ \Longleftrightarrow\ \cdots\cdots\ \Longleftrightarrow\ 0\leqq a\leqq3$$

とすべきところを

「①と②を満たす実数a，b，c，dが存在する」

$$\Longleftrightarrow\ \cdots\cdots\ \Longrightarrow\ \cdots\cdots\ \Longleftrightarrow\ -1\leqq a\leqq3$$

としてしまった（１カ所「⇒」）点であることを指摘し，どこが「⇒」なのかを考えてもらいます。

それは冒頭の「①かつ②」から「②−①×2」として，**それだけで**先に進んだ箇所です。では，なぜそれがミスなのか。「定数を消去したこと」が問題なのか。そうではなく，条件「①　$\boldsymbol{A=6}$ **かつ** ②　$\boldsymbol{B=12}$」がそれより緩い条件「$\boldsymbol{2A=B}$」にすり替わったことが直接の原因です。では「①かつ②」を同値な条件に直すにはどうしたらよいか。これについては簡単な例があります。連立方程式

$$\begin{cases} x+y=5 & \cdots\cdots④ \\ x-y=3 & \cdots\cdots⑤ \end{cases}$$

を加減法で解く作業は，「④かつ⑤」をそれと同値な「④＋⑤ かつ ④−⑤」に直したことに他ならず，上の「$A=6$ かつ $B=12$」であれば，例えば「$2A=B$ かつ $A+6=B$」であれば同値です。ただ残念なことに，この方針は【問題１】の解決にはつながらないようです。

こうして誤答の原因は突き止められたものの，よい修正方法や腕力によらないアイデアが思い浮かばないまま３年が経過したある日，きっかけは突然やってきました。

§5. 同次式で解決！

誤答の原因は

$$2a+4b+6c+8d=12$$
$$a^2+4b^2+9c^2+16d^2=12$$

の２式から右辺の定数12を消去しただけで終わりにしてしまったことでしたが，定数消去の結果，同次式が得られれば功を奏することが多いのです。次の【問題３】がその一例です。

> **【問題３】** 正数a，b，cが $ab+bc+ca=1$ を満たすとき
>
> ⑴ $a^2+b^2+c^2\geqq1$ を示せ。
>
> ⑵ $a+b+c\geqq\sqrt{3}$ を示せ。

⑴ 不等式の右辺の１に，条件式を 1= と見て代入すれば，示すべき不等式は次のようになりますからあっさり解決します。

$$a^2+b^2+c^2\geqq ab+bc+ca$$

(2)　示すべき不等式の両辺を２乗すれば

$$(a+b+c)^2 \geqq 3ab+3bc+3ca$$

ですから，同じ不等式に帰着します。ノートを整理していてこの問題を見かけたとき，ピンときて**【問題１】**を同次式に持ち込んでみました。$2b$，$3c$，$4d$ はカモフラージュなので，以下，条件を

$$a+b+c+d=6$$

$$a^2+b^2+c^2+d^2=12$$

に改めます。まず，評価したい a を右辺に移項して

$$b+c+d=6-a \quad \cdots\cdots ⑥$$

$$b^2+c^2+d^2=12-a^2 \quad \cdots\cdots ⑦$$

次に，**同次式に**するために⑥の両辺を２乗して

$$b^2+c^2+d^2+2bc+2cd+2bd=(6-a)^2 \quad \cdots\cdots ⑥'$$

⑦×3−⑥′ によって**定数を消去**して

$$2(b^2+c^2+d^2-bc-cd-bd)=-4a^2+12a \quad \cdots\cdots ⑧$$

この⑧について

$$(\text{左辺})=(b-c)^2+(c-d)^2+(b-d)^2 \geqq 0$$

等号も成立しますから，右辺も(B)の意味での $\geqq 0$ となって予感は的中，正解に至ります。

振り返ってみれば，計算そのものは誘導に沿った解法と全く同じなのですが，偶然やひらめきではなく**定数を消去して同次式を作る**という意図からそれが実現した点に価値があると考えます。同次式という視点で眺めると見方が変わる場面は他にもたくさんあります。

なお，**【問題２】**の不等式はシュワルツの不等式

$$(1^2+1^2+1^2)(b^2+c^2+d^2) \geqq (b+c+d)^2$$

そのものと見ることができます。

これで「いつでもドンと来い！」と言いたいところなのですが，「定数を消して同次式を作ればいつでも大丈夫なのか」が定かではありません。画竜点睛を欠いています。

§6．むすびにかえて

数年前にこの質問を初めて受けたときは，内心ドキリとしました。その場ではミスの原因を見抜くことができませんでした。しかも「定数を消去したことに直接の原因があるのではないか」「やはり(1)は(2)のヒント！」などと質問をかわしてしまいました。ただ，その後も繰り返される同じ質問が原動力となってここまでこぎつけることができました。**定数を消去して同次式にすればとりうる値の範囲が得られる理論的根拠**について，数研通信誌上で諸先生方のご教示を請う次第です。

《参考文献》

〔１〕「新課程　教科書傍用　サクシード
数学Ⅱ＋Ｂ　〔数列，統計的な推測〕」数研出版
(2022)

（東京都立武蔵高等学校・附属中学校）