D，軸，$f(k)$ に着目するのはセカンドステージ
～授業の工夫～

福岡（ふくおか）　恵一（けいいち）

§1．はじめに

教育実習の指導教官をしたとき，「**2次方程式の解の存在範囲**」の問題を指導する場面があった。

なぜ，D，軸，$f(k)$ に着目すると解けるのかの説明を，実習生とともに悩んだ記憶がある。

（以下，2次方程式の左辺部分を $f(x)$ とし，2次方程式の判別式をDとする。また，解の条件の端の値をkとする。）

> **【参考文献〔1〕**
> **基本例題 96　2次方程式の解の存在範囲(1)】**
> 2次方程式 $x^2-(a-1)x+a+2=0$ が次のような解をもつとき，定数aの値の範囲を求めよ。
> (1)　異なる2つの正の解　(2)　正の解と負の解

次のように考えるのが定石である。

① **条件を満たす $y=f(x)$ のグラフをかく。**

② **「D，軸，$f(k)$」に着目する。**

いきなり定石を教えるのではなく，「どのような経緯で，この定石にたどり着くのか」ということが必要だと考える。

疑問1　グラフを使わないと解けないのか。

疑問2　なぜ $f(k)$ に着目するのか。

疑問3　なぜ(1)の問題は，D，軸，$f(k)$ を調べればよいのか。なぜ(2)の問題は，$f(k)$ の条件だけでよいのか。

※本稿のメインは「**疑問3**」である。

§2．疑問1について

疑問1　**「グラフを使わないと解けないのか」**

グラフを使わずとも解けるので，解いてみる。定石を知らなくても，「数学Ⅰ」の範囲で，例えば次のように解けば，かなり大変だが正答までたどりつける。

【解答】を示せば，根号が出てきたり，場合分けのようなことをしたり，面倒なことは生徒も感じるだろう。

【解答】

(1)　条件より，2次方程式の解の公式から求まる異なる2つの実数解のうちの，小さい方の解が0より大きくなればよい。

すなわち　$\dfrac{a-1-\sqrt{a^2-6a-7}}{2}>0$

これより　$\sqrt{a^2-6a-7}<a-1$　……①

元の2次方程式は，異なる2つの実数解をもつから

$D>0$　すなわち　$a^2-6a-7>0$　……②

これより　$0<\sqrt{a^2-6a-7}$　……③

よって，①の両辺は正になることが分かるから，①の両辺を2乗しても大小は変わらない。

ゆえに　$a^2-6a-7<(a-1)^2$　……④

また，①，③より　$0<a-1$　……⑤

②，④，⑤を連立して

②より　$a<-1,\ 7<a$

④より　$a>-2$

⑤より　$a>1$

これらの共通範囲を求めて　$\boldsymbol{a>7}$

(2)　条件より

$$\frac{a-1-\sqrt{a^2-6a-7}}{2}<0<\frac{a-1+\sqrt{a^2-6a-7}}{2}$$

すなわち　$\begin{cases} a-1<\sqrt{a^2-6a-7} & \cdots\cdots ⑥ \\ -a+1<\sqrt{a^2-6a-7} & \cdots\cdots ⑦ \end{cases}$

また，(1)同様，2次方程式が異なる2つの実数解をもつことから，②と③は成り立ち

$a<-1,\ 7<a$

［1］ $a<-1$ の場合
⑥の左辺は負，右辺は正であるから常に成り立つ。
⑦は両辺ともに正であるから，両辺を 2 乗して

$$a^2-2a+1<a^2-6a-7$$

これを解いて　　$a<-2$
これは $a<-1$ を満たす。

［2］ $a>7$ の場合
⑦の左辺は負，右辺は正であるから常に成り立つ。
⑥は両辺ともに正であるから，両辺を 2 乗して

$$a^2-2a+1<a^2-6a-7$$

これを解いて　　$a<-2$
これは $a>7$ を満たさない。

［1］，［2］より　$\boldsymbol{a<-2}$

※もちろん「2 実数解の積が負」に気づけば，もう少し楽だが。

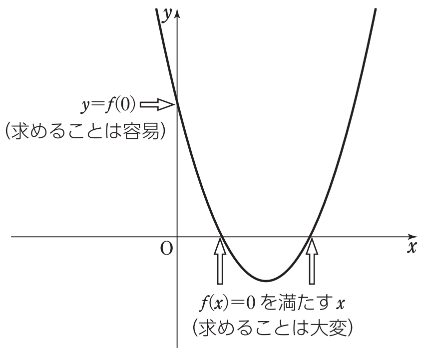
§3. 疑問 2 について

疑問 2　「**なぜ $f(k)$ に着目するのか**」

「数学Ⅰ」で初めて，「**ヨコの問題をタテに考える**」場面だ。2 次関数に限らず，次が言えるだろう。

> 関数 $y=f(x)$ においては，
> 「**特定の y の値を満たす x の値を求める**」より，
> 「**ある x の値に対する y の値を求める**」方が，
> はるかに容易である。

このことに気づけば，グラフを用いた解法が有効であることが分かるだろう。



さらに，「2 次方程式の解が k より大きい」などの問題では，$f(k)$ の符号に着目すればあっという間に条件が書けて，計算も簡単である。基本的に根号も出てこない。

§4. 疑問 3 について

疑問 3　「**なぜ(1)の問題は，D，軸，$f(k)$ を調べればよいのか。なぜ(2)の問題は，$f(k)$ の条件だけでよいのか**」

「定石はこうだ」と言うのは簡単であるが，「なぜそれでいいのか」を説明するのは，かなり苦しい。

私は，最初の段階(ファーストステージ)では，「**まず『$f(k)$』に着目し，次に『頂点の位置』に着目せよ**」と説明する。

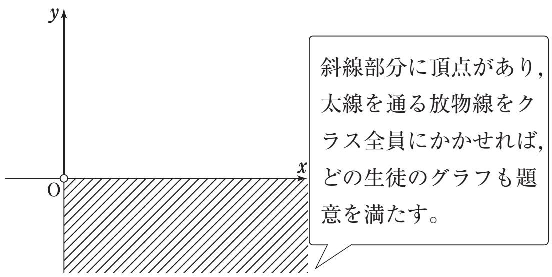
> 条件を満たすグラフをかく。
> 　↓
> $f(k)$ の条件をつくり，
> それだけで必要十分条件になるのかを考える。
> 　↓
> 反例があるようなら，次は『**頂点の位置**』を調べ，これで必要十分条件になるのかを考える。

基本例題 96(1)なら，流れはこうだ。

① グラフをかいてみる。
② グラフから分かる $f(0)>0$ は，必要十分条件か？
③ 反例のグラフがかけてしまうので，必要十分条件ではない。
④ グラフの『**頂点の位置**』は
頂点の x 座標 >0，頂点の y 座標 <0
⑤ 上記②と④の条件で放物線をかいたときに，反例はあるか？
⑥ どうやっても，必ず問題の条件のグラフになる。

よって　$\begin{cases} f(0)>0 \\ \text{頂点の } x \text{ 座標} >0 \\ \text{頂点の } y \text{ 座標} <0 \end{cases}$

この連立不等式を解けばよい。



【(1)の解答】

題意を満たす必要十分条件は

$f(0)>0$ かつ頂点が「x 座標 >0，y 座標 <0」

であること。

$f(0)=a+2$

ここで，$f(0)>0$ より　$a+2>0$

また，放物線 $y=f(x)$ の頂点を求めると

$$y=x^2-(a-1)x+a+2$$
$$=\left\{x-\left(\frac{a-1}{2}\right)\right\}^2-\frac{(a-1)^2}{4}+a+2$$
$$=\left\{x-\left(\frac{a-1}{2}\right)\right\}^2-\frac{a^2-6a-7}{4}$$

であるから，頂点は　　点$\left(\dfrac{a-1}{2},\ -\dfrac{a^2-6a-7}{4}\right)$

よって，題意を満たすための必要十分条件は

$$\begin{cases} a+2>0 & \cdots\cdots ① \\ \dfrac{a-1}{2}>0 & \cdots\cdots ② \\ -\dfrac{a^2-6a-7}{4}<0 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①より　$a>-2$

②より　$a>1$

③より　$a<-1,\ 7<a$

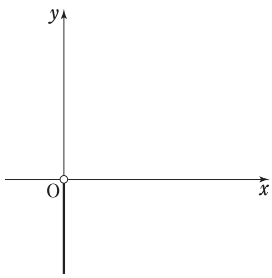
これらの共通範囲を求めて　　$\boldsymbol{a>7}$

基本例題 96(2)なら，流れはこうだ。

① グラフをかいてみる。$f(0)<0$ になる。

② $f(0)<0$ は必要十分条件か？

③ どうかいても反例はなく，これが必要十分条件である。



太線を通る放物線をクラス全員にかかせれば，どの生徒のグラフも題意を満たす。
あえて頂点の位置を調べる必要はない。

【(2)の解答】

題意を満たす必要十分条件は　　$f(0)<0$

よって　$a+2<0$　すなわち　$\boldsymbol{a<-2}$

この方法でもう1問ほど練習させた後で，次のことを確認させる。

> ［1］ **頂点の x 座標「$-\dfrac{b}{2a}$」と，**
> **軸「$x=-\dfrac{b}{2a}$」の右辺は，同じ値である。**
>
> ［2］ **頂点の y 座標「$-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$」の符号と，**
> **判別式 D の符号は，連動している。**

［2］は，事前に授業で扱っているとよい。

この確認をすることで，次回からは，平方完成をしなくても，「まず『$\boldsymbol{f(k)}$』次に『$\boldsymbol{D}$，**軸**』に着目」することで解いてよいことに気づくであろう。

§5. 終わりに

「2次方程式の解の存在範囲」の問題には，他にもいくつかのパターンがあるが，いきなりセカンドステージである

『$\boldsymbol{D}$，**軸**，$\boldsymbol{f(k)}$』ではなく，

ファーストステージとして

「まず『$\boldsymbol{f(k)}$』，次に『**頂点の位置**』」

で考えた方が，理解しやすい場合がある。

《参考文献》

〔1〕「新課程　チャート式　解法と演習　数学Ⅰ＋A」数研出版(2021)

〔2〕 上村昭　著「2次方程式の解と実数Kの大小関係　色による判定/(授業のまとめより)」数研通信　数学　No.2

(埼玉県立大宮南高等学校)