いろいろな検算の手法

石井（いしい）　一郎（いちろう）

§1. はじめに

問題を解いてせっかく**“怪答”**にたどり着いても，途中で計算ミス等をしていて誤答になっていても，生徒は全く気にせずに次の問題へ進んでしまう。ミスをしないのが一番ではあるが，誰しもミスをしてしまう。一度ミスをしたら，自分の解答をなぞっても，ミスはなかなか見つかるものではない。本稿では，数値を代入したり，別解（簡単な別解に限るが……）で解いたり，飛び道具（教科書には載っていない公式・定理など入試では使えないもの？）を用いた**検算**を考えたいと思う。

§2. 検算例

【例１】　１次不定方程式

次の方程式の整数解をすべて求めよ。

$47x+10y=1$　　…… ①

【解答】

互除法により

$47=10\cdot4+7$　$\to 7=47-10\cdot4$

$10=7\cdot1+3$　$\to 3=10-7\cdot1$

$7=3\cdot2+1$　$\to 1=7-3\cdot2$

から　$1=7-(10-7\cdot1)\cdot2=7\cdot3+10\cdot(-2)$

$=(47-10\cdot4)\cdot3+10\cdot(-2)=47\cdot3+10\cdot(-14)$

よって，①の整数解の１つは

$x=3,\ y=-14$

である。

$47\cdot3+10\cdot(-14)=1$　　…… ②

①－②から　　$47(x-3)+10(y+14)=0$

すなわち　　$47(x-3)=-10(y+14)$　　…… ③

47と10は互いに素であるから，$x-3$は10の倍数である。よって，整数kを用いて

$x-3=-10k$

と表される。

これを③に代入すると　$47\cdot(-10k)=-10(y+14)$

整理すると　　$y=47k-14$

よって　　$x=-10k+3,\ y=47k-14$　（kは整数）

$\boxed{\text{検算}}$

$k=0,\ 1$ を代入してみる。

$k=0$ のとき　　$x=3,\ y=-14$　①を満たす。

$k=1$ のとき　　$x=-7,\ y=33$　①を満たす。

これで十分である。なぜならば，①は直線を表すから，①を満たす２点を通ればよいからである。

$\boxed{\text{蛇足}}$

生徒によっては，互除法に習熟するまでに時間がかかるので，書き出す方法も教えている。

①を満たす解を探す場合

47の倍数　47，94，**141**，188，235，……

10の倍数　10，20，30，……，130，**140**，150，……

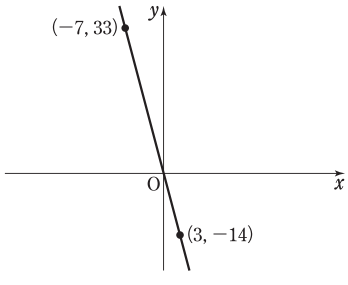
よって，①の整数解の１つは

$x=3,\ y=-14$

※x，yの係数が１桁のときは，書き出した方が速い！

また，$47x+10y=1$ のグラフをかいてみると

$y=-\dfrac{47}{10}x+\dfrac{1}{10}$



１組解を見つけると，グラフの傾きから，xが10増加するとyは47減少する。

（または，xが10減少するとyは47増加する。）

このことから

$x=10k+3,\ y=-47k-14$　（kは整数）

または

$x=-10k+3,\ y=47k-14$　（kは整数）

グラフの傾きを考えると，符号のミスは防ぐことができる。

別解Ⅰ

剰余類を用いると，$47x+10y=1$ すなわち

$47x-1=-10y$ から

$$47x-1\equiv 0 \pmod{10}$$

また　　$10x\equiv 0 \pmod{10}$　　…… ①

よって　　$50x\equiv 0 \pmod{10}$　　…… ②

同様に　　$47x\equiv 1 \pmod{10}$　　…… ③

②－③ から　　$3x\equiv -1 \pmod{10}$

両辺を 3 倍すると　　$9x\equiv -3 \pmod{10}$　　…… ④

①－④ から　　$x\equiv 3 \pmod{10}$

整数 k を用いて　　$x=10k+3$　　…… ⑤

と表される。

⑤を $47x+10y=1$ に代入，整理すると

$$y=-47k-14$$

よって　　$x=10k+3,\ y=-47k-14$　（k は整数）

別解Ⅱ

$47x+10y=1$ …… ① を変形して

$10(4x+y)+7x=1$　　…… ②

特殊解は　　$4x+y=-2,\ x=3$

よって　　$10\cdot(-2)+7\cdot 3=1$　　…… ③

②－③ から　　$10(4x+y+2)+7(x-3)=0$

すなわち　　$10(4x+y+2)=-7(x-3)$

10 と 7 は互いに素であるから，$x-3$ は 10 の倍数である。よって，整数 k を用いて

$$x-3=-10k$$

と表される。

これを①に代入，整理すると　　$y=47k-14$

よって　　$x=-10k+3,\ y=47k-14$　（k は整数）

【例 2】　2 次関数の最大値·最小値の場合分け

a は定数とする。次の関数の最小値 m を求めよ。

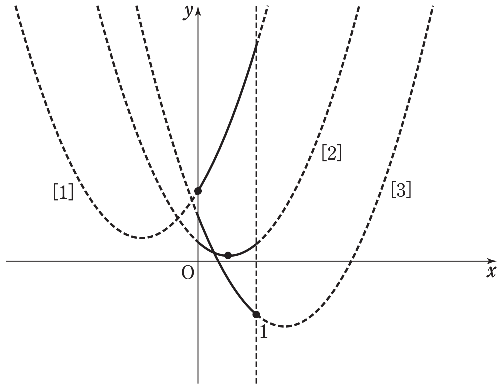
$$f(x)=2x^2-4ax+a^2-a+1 \quad (0\leqq x\leqq 1)$$

【解答】

この関数の式を変形すると

$$f(x)=2(x-a)^2-a^2-a+1 \quad (0\leqq x\leqq 1)$$

軸 $x=a$ の位置で場合分け



［1］　$a<0$ のとき　　$x=0$ で最小値 a^2-a+1

［2］　$0\leqq a<1$ のとき　$x=a$ で最小値 $-a^2-a+1$

［3］　$a\geqq 1$ のとき　　$x=1$ で最小値 a^2-5a+3

［1］，［2］，［3］から

$$m=\begin{cases} a^2-a+1 \ (a<0 \text{ のとき}) \\ -a^2-a+1 \ (0\leqq a<1 \text{ のとき}) \\ a^2-5a+3 \ (a\geqq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

検算

【例 1】の検算より精度は落ちるが……

“2 次関数の最小値が連続になるのは自明であるから，場合分けの境目（ここでは $a=0,\ a=1$ のとき）”で答えが連続になることを確認する。

$a=0$ のとき

［1］のとき　1　　［2］のとき　1　　よって連続

$a=1$ のとき

［2］のとき　-1　［3］のとき　-1　よって連続

よって，必要十分とは言えないが一安心！

さらに，デジタルコンテンツを使って，最小値のグラフを生徒に提示して，連続となることを示しておくことも有効である。

【例 3】　定積分（参考文献〔2〕$p.264$）

$\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx$ を求めよ。

【解答】

$$\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx$$

$$=\Big[-e^{-x}\sin x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-e^{-x}\cos x)\,dx$$

$$=\int_0^{\pi} e^{-x}\cos x\,dx$$

$$=\Big[-e^{-x}\cos x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\{-e^{-x}(-\sin x)\}\,dx$$

$$=e^{-\pi}+1-\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx$$

よって　$2\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx = e^{-\pi}+1$

したがって　$\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx = \frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)$

※部分積分を 2 回行うと，係数でミスをすることが多く，自分で一度犯したミスは，自分でなかなか見つけられない。そこで，まず不定積分を求めて，その不定積分を微分して **“元”** に戻ることを確認できれば，後は数値を丁寧に代入すればよい。

検算

まず，不定積分を求める。

$$\int e^{-x}\sin x\,dx$$
$$= -e^{-x}\sin x - \int(-e^{-x})\cos x\,dx$$
$$= -e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\cos x\,dx$$
$$= -e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x - \int(-e^{-x})(-\sin x)\,dx$$
$$= -e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\sin x\,dx$$

よって

$$2\int e^{-x}\sin x\,dx = -e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x$$
$$\int e^{-x}\sin x\,dx = -\frac{1}{2}(e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x) + C$$

（C は積分定数）

この不定積分を微分して **“元”** に戻ることを確認する！

$$\left\{-\frac{1}{2}(e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x)\right\}'$$
$$= -\frac{1}{2}(-e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x - e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x)$$
$$= e^{-x}\sin x$$

後は代入するだけ！

$$\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx$$
$$= \left[-\frac{1}{2}(e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x)\right]_0^{\pi}$$
$$= -\frac{1}{2}(e^{-\pi}\sin\pi + e^{-\pi}\cos\pi) + \frac{1}{2}(0+1)$$
$$= \frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)$$

【例 4】　漸化式

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1$　($n=1, 2, 3, \cdots\cdots$)

【解答】

（まず，特殊解を求める。(答案には残さない。))

$c=2c+1$ から　$c=-1$

$a_{n+1}=2a_n+1$ を変形すると

$$a_{n+1}-(-1)=2a_n+1-(-1)$$
$$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$$

よって，数列 $\{a_n+1\}$ は，初項 $a_1+1=2$，公比 2 の等比数列であるから

$$a_n+1=2\cdot 2^{n-1}$$

したがって，一般項は　$a_n=2^n-1$

検算

$n=1$，2 を代入してみる。

$n=1$ のとき　$2^1-1=1$

初項 $a_1=1$ に合っている。

$n=2$ のとき　$2^2-1=3$

$a_2=2a_1+1=3$ に合っている。

念のため((**注**)を参照)

$n=3$ のとき　$2^3-1=7$

$a_3=2a_2+1=7$ に合っている。

(**注**)　多くの場合，2 項間漸化式の検算は $n=1$，2 で十分であるが，階差数列等を用いて推測した場合，合わない例がある。

推測

$$a_1=1,\ a_2=3,\ a_3=7,\ \cdots\cdots$$

階差数列　$a_2-a_1=2$，$a_3-a_2=4$

から，(安直に)階差数列を $2n$ と推測すると

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2k=1+2\cdot\frac{n(n-1)}{2}$$
$$=n^2-n+1$$

$n=1$ のとき

$$1^2-1+1=1$$

となり，$a_1=1$ に一致する。

よって　$a_n=n^2-n+1$

この **“怪答”** だと，$n=1$，2，3 までは合うが，

$n=4$ のとき　$4^2-4+1=13$，$a_4=2a_3+1=15$

ここで，初めて合わない!

階差数列を用いて推測するときも，階差数列を少なくとも 3 項以上とっておくことが必要である。

3 項間漸化式においては，推測ではない **“きちんとした解答”** で求めた答えでも，最低限 $n=1$，2，3 までは検算しておく方がよい。

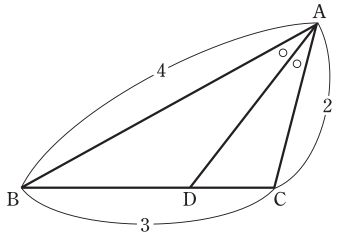
§3. 飛び道具編

教科書には載っていない，または一部の教科書には記述がある公式・定理等は，大学入試において記述式に用いるのはNGかもしれないが，マークシート方式や検算に用いるのには有効である。

【例5】 三角形の角の二等分線の長さ

△ABCにおいて，AB=4，BC=3，CA=2とし，∠Aの二等分線と辺BCの交点をDとする。線分ADの長さを求めよ。

【解答】



△ABCに余弦定理を適用して

$$\cos B=\frac{4^2+3^2-2^2}{2\cdot4\cdot3}=\frac{7}{8}$$

ADは∠Aの二等分線であるから

AB：AC=BD：DC

である。

よって　　BD：DC=4：2=2：1

$$BD=\frac{2}{3}\cdot3=2,\ DC=\frac{1}{3}\cdot3=1$$

△ABDに余弦定理を適用して

$$AD^2=4^2+2^2-2\cdot4\cdot2\cos B=16+4-16\cdot\frac{7}{8}=6$$

AD>0 であるから　　$AD=\sqrt{6}$

△ABCにおいて，頂角Aの二等分線と辺BCの交点をDとするとき，一般に

$AD^2=AB\cdot AC-BD\cdot CD$

が成り立つ。(参考文献〔1〕$p.257$)

この公式を用いると，ADは∠Aの二等分線であるから

AB：AC=BD：DC

である。

よって　　BD：DC=4：2=2：1

$$BD=\frac{2}{3}\cdot3=2,\ DC=\frac{1}{3}\cdot3=1$$

$$AD^2=4\cdot2-2\cdot1=6$$

AD>0 であるから　　$AD=\sqrt{6}$

※計算量も減るので，簡単に検算できる！

他にも，図形の計量に関する公式で，次のものも有効である。

円に内接する四角形の面積(ブラーマグプタの公式)

(参考文献〔1〕$p.271$)

円に内接する四角形の4辺の長さをa，b，c，dとし，$2s=a+b+c+d$ とすると，この四角形の面積Sは

$$\boldsymbol{S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}$$

である。

例

円に内接する四角形ABCDにおいて，AB=2，BC=3，CD=4，DA=5 とするとき，
四角形ABCDの面積Sを求めてみよう。
この公式を用いると

$$s=\frac{2+3+4+5}{2}=7$$

$$S=\sqrt{(7-2)(7-3)(7-4)(7-5)}=2\sqrt{30}$$

で瞬殺である。

△ABCの内接円の半径rに関する公式

$2s=a+b+c$ とすると

$$\boldsymbol{r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}}$$

も，習熟度の高い生徒に紹介してもよい。

【例6】 極限

極限 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos3x}{x^2}$ を求めよ。

【解答】

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos3x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos3x)(1+\cos3x)}{x^2(1+\cos3x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 3x}{x^2(1+\cos3x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 3x}{x^2(1+\cos3x)}$$
$$=\lim_{x\to0}9\left(\frac{\sin3x}{3x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos3x}=\frac{9}{2}$$

ロピタルの定理

（参考文献〔2〕$p.159$）

関数 $f(x)$，$g(x)$ が $x=a$ を含む区間で連続，$x=a$ 以外の区間で微分可能で，$\displaystyle\lim_{x\to a}\boldsymbol{f(x)=0}$，$\displaystyle\lim_{x\to a}\boldsymbol{g(x)=0}$，$\boldsymbol{g'(x)\neq 0}$ **のとき**

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l \text{（有限確定値）ならば}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=l$$

この定理を2回用いると瞬殺である。

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{2x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{9\cos 3x}{2}$$
$$=\frac{9}{2}$$

ただし，ロピタルの定理は，前提条件をきちんと理解していないと **“怪答”** となってしまうので，注意が必要。

例えば，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}$ について

$$\lim_{x\to 0}\cos x=1$$

であるのに

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{1}=0$$

としてしまうことに，注意が必要である。

§4. 最後に

その他の **“飛び道具”** として**トレミーの定理**，**バームクーヘン積分**，**極方程式で表された図形の面積に関する公式**等が考えられる。生徒の理解度合いによって，証明も含めて教えておくとよい。

《参考文献》

〔1〕「新課程　チャート式　基礎からの数学Ⅰ＋A」数研出版(2021)

〔2〕「新課程　チャート式　基礎からの数学Ⅲ」数研出版(2023)

（岡山県立岡山朝日高等学校）