

ハイパボリックタンジェントと平均関数

いそ べ かず や
儀部 一哉

§1. はじめに

以前, $f(x) = \frac{a^{x+1} + b^{x+1}}{a^x + b^x}$ ($0 < a < b$) という関数を考えた。この関数の x に, 適当な数を与えると

$$f(0) = \frac{a^1 + b^1}{a^0 + b^0} = \frac{a+b}{2} \quad (\text{相加平均})$$

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2}\right) &= \frac{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}} = \sqrt{ab} \quad (\text{相乗平均}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-1) &= \frac{a^0 + b^0}{a^{-1} + b^{-1}} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \\ &= \frac{2ab}{a+b} \quad (\text{調和平均}) \end{aligned}$$

となり, 何かしらの平均が出てくるので「平均関数」と名付けていた。この関数は, すべての x に対し

$$a < \frac{a^{x+1} + b^{x+1}}{a^x + b^x} < b$$

となり, 単調増加関数であることから

$$-1 < -\frac{1}{2} < 0$$

なので, $0 < a < b$ ならば

調和平均 $<$ 相乗平均 $<$ 相加平均

となることも分かる。また, グラフは点 $\left(0, \frac{a+b}{2}\right)$

で点対称, 漸近線は $y=a$, $y=b$ である。(図1)

この関数何なのか今までは分からなかったが,

今回 $y = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (ハイパボリックタン

ジェント, 図2) と関係があることが分かったので, そのきっかけと経緯を紹介する。

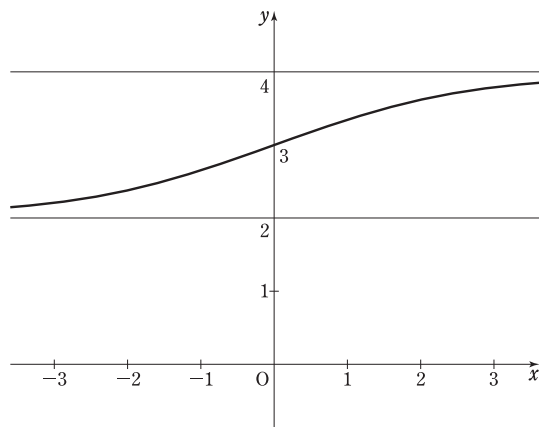


図1 $a=2, b=4$ のときの $f(x) = \frac{a^{x+1} + b^{x+1}}{a^x + b^x}$

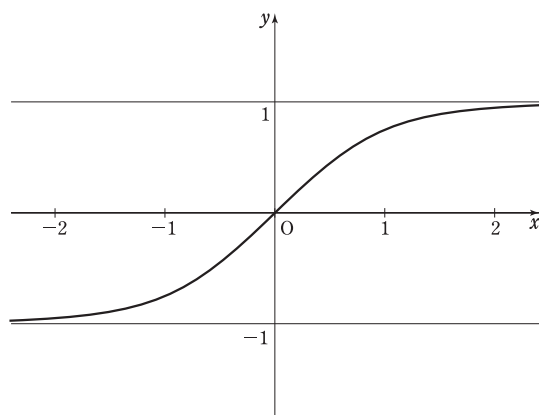


図2 $y = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ のグラフ

§2. 京都大学の入試問題より

京都大学の2007年度前期理系(乙)の入試問題の第6問より、 $f(0)=0$, $f'(0)=1$, 任意の実数 a, b に対して $1+f(a)f(b) \neq 0$ であって

$f(a+b) = \frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$ となる関数に関する問題が出題された。問いは、(1)が任意の実数 a に対して、 $-1 < f(a) < 1$ を示すことであり、(2)が $y=f(x)$ のグラフは $x>0$ で上に凸であることを示す問題であった。直接ハイパボリックタンジェントは出てこないし、 $f(x)$ の正体は分からなくてもいいのだが、この性質を満たす関数の1つとして、

$f(x) = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ がある。このハイパボリックタンジェントは、双曲線関数の1つで、三角関数とよく似た性質が多くあることが知られている。入試問題の関数の1つが、ハイパボリックタンジェントと気づいたきっかけは、

$f(a+b) = \frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$ が、タンジェントの加法定理に似ていると思ったことである。

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

なので、分母の1の後の符号が違うだけである。このような場合は、虚数単位 i を介した変換を使うと上手くいく。

オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ より

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

$$\tan x = (-i) \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}}$$

である。これより

$$\cos(ix) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$-i \sin(ix) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$-i \tan(ix) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \tanh x \quad \dots\dots ①$$

という、3つの双曲線関数と三角関数との関係式を得る。これより、タンジェントの加法定理へ $a \rightarrow ai$, $b \rightarrow bi$ と入れて、両辺に $(-i)$ を掛けると

$$\begin{aligned} -i \tan(ai + bi) &= \frac{-i \tan(ai) - i \tan(bi)}{1 - \tan(ai)\tan(bi)} \\ &= \frac{-i \tan(ai) - i \tan(bi)}{1 + (-i) \tan(ai) \times (-i) \tan(bi)} \end{aligned}$$

よって、①より

$$\tanh(a+b) = \frac{\tanh(a) + \tanh(b)}{1 + \tanh(a)\tanh(b)}$$

という、ハイパボリックタンジェントの加法定理を得た。したがって、この入試問題は、ハイパボリックタンジェントを念頭に置いて作られた問題であると考えられ、このグラフを考えると、どうも「平均関数」に近い気がしたので、どちらかのグラフを変形したり、平行移動させたりすることで、どれくらいまで近づけることができるかを考えてみた。

§3. $y = \tanh x$ を平均関数へ近づけてみる

平均関数は $f(0) = \frac{a+b}{2}$ で、 $a < f(x) < b$ であるから

$$y = \frac{b-a}{2} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} + \frac{a+b}{2}$$

とすればかなり近づき、後は x 軸方向に何倍かの調整をすればよいと考え

$$y = \frac{b-a}{2} \cdot \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{e^{kx} + e^{-kx}} + \frac{a+b}{2} = \frac{a^{x+1} + b^{x+1}}{a^x + b^x}$$

を満たす実数 k が存在しないかと思い、この式を k についての恒等式と思って解いてみたら、

$$k = \frac{\log \frac{b}{a}}{2} \text{ と解けてしまった。したがって、平均関数とハイパボリックタンジェントを結びつける、以下の【定理】を得た。}$$

【定理】

$$f(x) = \frac{a^{x+1} + b^{x+1}}{a^x + b^x} \quad (0 < a < b),$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\text{ならば} \quad f(x) = \frac{b-a}{2} \cdot \tanh\left(\frac{\log \frac{b}{a}}{2} x\right) + \frac{a+b}{2}$$

【証明】

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \frac{b-a}{2} \cdot \tanh\left(\frac{\log \frac{b}{a}}{2} x\right) + \frac{a+b}{2} \\ &= \frac{b-a}{2} \cdot \frac{e^{x \log \frac{b}{a}} - 1}{e^{x \log \frac{b}{a}} + 1} + \frac{a+b}{2} \\ &= \frac{b-a}{2} \cdot \frac{-a^x + b^x}{a^x + b^x} + \frac{a+b}{2} \\ &= \frac{a^{x+1} + b^{x+1}}{a^x + b^x} = f(x) \end{aligned}$$

証明終

§4. 一般化

ついでに一般化しておくと、先ほどの京都大学の入試問題の $f(a+b) = \frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$ を満たす関数として、

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \text{の他に} \quad y = \frac{k^x - k^{-x}}{k^x + k^{-x}} \quad (k > 0) \quad \text{がある。}$$

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \tanh_e(x) \quad \text{と表すと,}$$

$$y = \frac{k^x - k^{-x}}{k^x + k^{-x}} = \tanh_k(x) \quad \text{である。定理の一般化は}$$

$$f(x) = \frac{a^{x+1} + b^{x+1}}{a^x + b^x} \quad (0 < a < b),$$

$$\tanh_k(x) = \frac{k^x - k^{-x}}{k^x + k^{-x}}$$

ならば

$$f(x) = \frac{b-a}{2} \cdot \tanh_k\left(\frac{\log_k \frac{b}{a}}{2} x\right) + \frac{a+b}{2}$$

(証明略)

§5. さいごに

以前に考えた「平均関数」は、使い道はそれほどなく、「いろいろな平均が出てくるので面白い」くらいに思って放っておいたが、今回の京都大学の入試問題からハイパボリックタンジェントの存在を知り、平行移動と縦横の縮尺で同じものになることが分かり、「平均」と「双曲線関数」が、思わぬところにつながった。

《参考文献》

- [1] 『2007 年版 数学Ⅲ・C 入試問題集』
数研出版(2007)

(愛知県 至学館高等学校)