

$\sum_{a+b+c=N} abc$ について考える

たけうち けんじ
竹内 憲治

§1. はじめに

同僚から，“生徒の作問”として，次の【問題】を教えてもらった。

【問題1】 $a+b+c=20$ を満たす自然数の組 (a, b, c) について，次のものを求めよ。

- (1) 3 積 abc の総和 $\sum_{a+b+c=20} abc$
- (2) 4 積 a^2bc の総和 $\sum_{a+b+c=20} a^2bc$

一見すると，和 $a+b+c$ と積 abc に関する問題だから，ABC 予想が想起されて不安になるが，例えば，形式的べき級数を用いると，次のように解答できる。

【解答】

- (1) 求めるものは

$$(x+2x^2+3x^3+\cdots)^3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

の展開式における， x^{20} の係数である。

$$\textcircled{1} = x^3(1+2x+3x^2+\cdots)^3$$

であるから，求めるものは

$$(1+2x+3x^2+\cdots)^3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

の展開式における， x^{17} の係数である。ここで

$$1+x+x^2+x^3+\cdots = \frac{1}{1-x}$$

両辺を x で微分すると

$$1+2x+3x^2+\cdots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

よって

$$\begin{aligned} \textcircled{2} &= \left\{ \frac{1}{(1-x)^2} \right\}^3 = \frac{1}{(1-x)^6} \\ &= {}_6H_0 + {}_6H_1x + {}_6H_2x^2 + {}_6H_3x^3 + \cdots \end{aligned}$$

求めるものは

$${}_6H_{17} = {}_{22}C_5 = 26334 \quad \text{答}$$

- (2) 求めるものは

$$(1^2+2^2x+3^2x^2+\cdots)(1+2x+3x^2+\cdots)^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

の展開式における， x^{17} の係数である。若干の苦

勞の末

$$\begin{aligned} \textcircled{3} &= \frac{1}{(1-x)^6} + \frac{2x}{(1-x)^7} \\ &= ({}_6H_0 + {}_6H_1x + \cdots + {}_6H_{17}x^{17} + \cdots) \\ &\quad + 2x({}_7H_0 + {}_7H_1x + \cdots + {}_7H_{16}x^{16} + \cdots) \end{aligned}$$

よって， x^{17} の係数は

$$\begin{aligned} {}_6H_{17} + 2 \times {}_7H_{16} &= {}_{22}C_5 + 2 \times {}_{22}C_6 \\ &= 175560 \end{aligned} \quad \text{答}$$

これでよいと思っていたところ，出題者である生徒の【解答】は，もっとエレガントだった。

【生徒の解答】

- (1) $20+2=22$ 個の $\bigcirc$ から 5 個を選び，選ばれたものを $\bullet$ で表す。選ばれた 5 個の $\bullet$ のうち，左から 2 番目と 4 番目の $\bullet$ を仕切りと考える。

$$\begin{array}{c} a \text{ 個} \quad b \text{ 個} \quad c \text{ 個} \\ \bigcirc \cdots \bigcirc \bullet \cdots \bigcirc \bullet \cdots \bigcirc \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ {}_aC_1 \times {}_bC_1 \times {}_cC_1 = abc \\ \text{よって} \quad \sum_{a+b+c=20} abc = {}_{22}C_5 \\ = 26334 \end{array} \quad \text{答}$$

- (2) $20+2=22$ 個の $\bigcirc$ から 6 個を選び，選ばれたものを $\bullet$ で表す。選ばれた 6 個の $\bullet$ のうち，左から 3 番目と 5 番目の $\bullet$ を仕切りと考える。

$$\begin{array}{c} a \text{ 個} \quad b \text{ 個} \quad c \text{ 個} \\ \bigcirc \cdots \bigcirc \bullet \cdots \bigcirc \bullet \cdots \bigcirc \\ \uparrow \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \bullet \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ {}_aC_2 \times {}_bC_1 \times {}_cC_1 = \frac{1}{2} a(a-1)bc \\ \text{よって} \quad {}_{22}C_6 = \frac{1}{2} \sum_{a+b+c=20} a(a-1)bc \\ \text{ゆえに} \quad 2 \times {}_{22}C_6 = \sum_{a+b+c=20} (a^2bc - abc) \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{したがって} \quad \sum_{a+b+c=20} a^2bc &= 2 \times {}_{22}C_6 \\
 &+ \sum_{a+b+c=20} abc \\
 &= 2 \times {}_{22}C_6 + {}_{22}C_5 \quad ((1)) \\
 &= 175560 \quad \boxed{\text{答}}
 \end{aligned}$$

§2. 生徒の解答の解説

生徒の作問では $a+b+c=20$ であったが、 $a+b+c=N$ として考えよう。

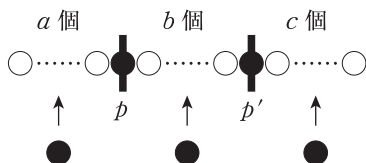
【問題2】 $a+b+c=N$ を満たす自然数の組 (a, b, c) について、次のものを求めよ。

(1) 3積 abc の総和 $\sum_{a+b+c=N} abc$

(2) 4積 a^2bc の総和 $\sum_{a+b+c=N} a^2bc$

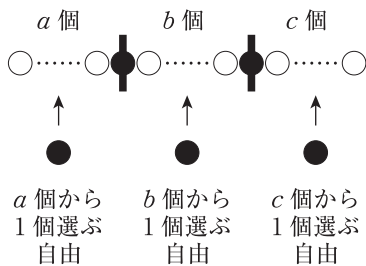
(1)について

N 個の $\bigcirc$ に、2 個の $\bigcirc$ を加えた $(N+2)$ 個の $\bigcirc$ を用意する。この中から 5 個を選び、選ばれたものを $\bullet$ で表す。選ばれた 5 個の $\bullet$ のうち、左から 2 番目と 4 番目の $\bullet$ を仕切り (partition) と考え、それぞれ p, p' とする。



仕切り p より左の $\bigcirc, \bullet$ の個数を a 個、
仕切り p と p' の間の $\bigcirc, \bullet$ の個数を b 個、
仕切り p' より右の $\bigcirc, \bullet$ の個数を c 個
とすれば、 $a+b+c=N$ を満たしている。

ここからが生徒の発想のすごいところである。2つの仕切り p, p' だけを固定して、残り 3 個の $\bullet$ に対しては、固定を解除して



という自由を付与すると、その仕方は

$${}_aC_1 \times {}_bC_1 \times {}_cC_1 = abc \text{ (通り)}$$

となり、3積 abc を作ることができる。

つまり、 $(N+2)$ 個の $\bigcirc$ から 5 個を選ぶ仕方は、仕切りの位置で分類されて、仕切りが

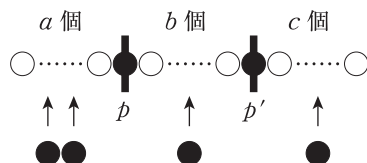
$a+b+c=N$ を満たすものは abc (通り) あるから

$$\sum_{a+b+c=N} abc = {}_{N+2}C_5$$

が得られる。

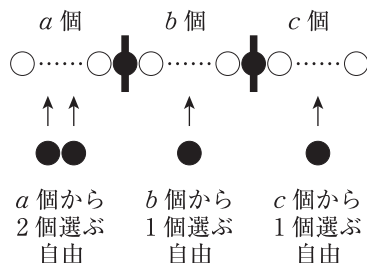
(2)について

N 個の $\bigcirc$ に、2 個の $\bigcirc$ を加えた $(N+2)$ 個の $\bigcirc$ を用意する。この中から 6 個を選び、選ばれたものを $\bullet$ で表す。選ばれた 6 個の $\bullet$ のうち、左から 3 番目と 5 番目の $\bullet$ を仕切りと考え、それぞれ p, p' とする。



仕切り p より左の $\bigcirc, \bullet$ の個数を a 個、
仕切り p と p' の間の $\bigcirc, \bullet$ の個数を b 個、
仕切り p' より右の $\bigcirc, \bullet$ の個数を c 個
とすれば、 $a+b+c=N$ (ただし、 $a \geq 2$) を満たしている。

ここで再び、2つの仕切り p, p' だけを固定して、残り 4 個の $\bullet$ に対しては、固定を解除して



という自由を付与すると、その仕方は

$${}_aC_2 \times {}_bC_1 \times {}_cC_1 = \frac{1}{2}a(a-1)bc \text{ (通り)}$$

となり、4積 a^2bc そのものではないが、展開すれば a^2bc は登場する。(1)と同様に考えると

$${}_{N+2}C_6 = \frac{1}{2} \sum_{\substack{a+b+c=N \\ a \geq 2}} a(a-1)bc$$

$$\text{よって} \quad {}_{N+2}C_6 = \frac{1}{2} \sum_{a+b+c=N} a(a-1)bc$$

($a=1$ のとき、 $a(a-1)bc=0$ より)

が得られる。ゆえに

$$\sum_{a+b+c=N} (a^2bc - abc) = 2 \times {}_{N+2}C_6$$

$$\sum_{a+b+c=N} a^2bc = 2 \times {}_{N+2}C_6 + \sum_{a+b+c=N} abc$$

$$= 2 \times {}_{N+2}C_6 + {}_{N+2}C_5 \quad \dots\dots ①$$

となる。ここで $n < r$ のとき ${}_nC_r = 0$ とすれば、等式①は $N=3$ に対しても成り立つ。なお、①をさらに計算すると

$$\sum_{a+b+c=N} a^2bc = \frac{N}{3} \times {}_{N+2}C_5$$

となるが、これは文字の対等性から

$$\sum_{a+b+c=N} a^2bc = \sum_{a+b+c=N} ab^2c = \sum_{a+b+c=N} abc^2$$

であることより

$$\sum_{a+b+c=N} a^2bc = \frac{1}{3} \sum_{a+b+c=N} (a^2bc + ab^2c + abc^2)$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{a+b+c=N} abc(a+b+c)$$

$$= \frac{N}{3} \times \sum_{a+b+c=N} abc$$

$$(a+b+c=N \text{ より})$$

$$= \frac{N}{3} \times {}_{N+2}C_5$$

からも確認できる。

§3. 階乗関数を用いた一般化

階乗関数 $t^{[n]}$ ($n \in \mathbb{Z}$) を次で定める。

$$t^{[0]} = 1,$$

$$t^{[n]} = \begin{cases} t(t-1)(t-2)\cdots(t-n+1) & (n > 0 \text{ のとき}) \\ \frac{1}{(t+1)(t+2)\cdots(t-n)} & (n < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

階乗関数を用いると

$$a^2 = a^{[2]} + a^{[1]}, \quad a^3 = a^{[3]} + 3a^{[2]} + a^{[1]}$$

のように表せる。その方法は、組立除法を用いるのが普通である。

	1	0	0	0
0		0	0	0
	1	0	0	0
1		1	1	
	1	1	1	
2		2		
	1	3		

よって $a^3 = a^{[3]} + 3a^{[2]} + a^{[1]}$

なお、 $a^{[1]} = a$ であるから、 a は $a^{[1]}$ でもそのままでもよい。

以下、 $\sum_{a+b+c=N}$ は Σ と略する。

階乗関数を用いた場合、【問題2】(2)は

$$\Sigma a^2bc = \Sigma (a^{[2]} + a)bc$$

$$= \Sigma a^{[2]}bc + \Sigma abc$$

$$= 2\Sigma \frac{a^{[2]}}{2}bc + \Sigma abc$$

$$= 2\Sigma {}_aC_2 \times {}_bC_1 \times {}_cC_1 + \Sigma {}_aC_1 \times {}_bC_1 \times {}_cC_1$$

$$= 2 \times {}_{N+2}C_6 + {}_{N+2}C_5$$

というふうに、スッキリと表現できる。

【問題3】 $a+b+c=N$ を満たす自然数の組 (a, b, c) について、次のものを求めよ。

- (1) 5 積 a^3bc の総和 $\sum_{a+b+c=N} a^3bc$
- (2) 5 積 a^2b^2c の総和 $\sum_{a+b+c=N} a^2b^2c$

【解答】

(1) $\Sigma a^3bc = \Sigma (a^{[3]} + 3a^{[2]} + a)bc$

$$= \Sigma a^{[3]}bc + 3\Sigma a^{[2]}bc + \Sigma abc$$

$$= 6\Sigma \frac{a^{[3]}}{6}bc + 6\Sigma \frac{a^{[2]}}{2}bc + \Sigma abc$$

$$= 6\Sigma {}_aC_3 \times {}_bC_1 \times {}_cC_1 + 6\Sigma {}_aC_2 \times {}_bC_1 \times {}_cC_1$$

$$+ \Sigma {}_aC_1 \times {}_bC_1 \times {}_cC_1$$

$$= 6 \times {}_{N+2}C_7 + 6 \times {}_{N+2}C_6 + {}_{N+2}C_5 \quad \text{【答】}$$

(2) $\Sigma a^2b^2c = \Sigma (a^{[2]} + a)(b^{[2]} + b)c$

$$= \Sigma a^{[2]}b^{[2]}c + \Sigma a^{[2]}bc + \Sigma ab^{[2]}c + \Sigma abc$$

$$= 4\Sigma \frac{a^{[2]}}{2} \frac{b^{[2]}}{2}c + 4\Sigma \frac{a^{[2]}}{2}bc + \Sigma abc$$

$$(\Sigma a^{[2]}bc = \Sigma ab^{[2]}c \text{ より})$$

$$= 4\Sigma {}_aC_2 \times {}_bC_2 \times {}_cC_1 + 4\Sigma {}_aC_2 \times {}_bC_1 \times {}_cC_1$$

$$+ \Sigma {}_aC_1 \times {}_bC_1 \times {}_cC_1$$

$$= 4 \times {}_{N+2}C_7 + 4 \times {}_{N+2}C_6 + {}_{N+2}C_5 \quad \text{【答】}$$

§4. まとめ

以上のことは、次のようにまとめられる。

$$\sum_{a+b+c=N} a^{[l]} b^{[m]} c^{[n]}$$

$$= l! m! n! \sum_{a+b+c=N} \frac{a^{[l]}}{l!} \frac{b^{[m]}}{m!} \frac{c^{[n]}}{n!}$$

$$= l! m! n! \sum_{a+b+c=N} {}_aC_l \times {}_bC_m \times {}_cC_n$$

$$= l! m! n! {}_{N+2}C_{l+m+n+2}$$

例えば, $\sum_{a+b+c=N} a^3 b^2 c$ であれば

$$\begin{aligned} a^3 b^2 c &= (a^{[3]} + 3a^{[2]} + a)(b^{[2]} + b)c \\ &= a^{[3]} b^{[2]} c + 3a^{[2]} b^{[2]} c + a b^{[2]} c \\ &\quad + a^{[3]} b c + 3a^{[2]} b c + a b c \end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned} \sum_{a+b+c=N} a^3 b^2 c &= 3! \times 2! \times_{N+2} C_8 + 3 \times 2! \times 2! \times_{N+2} C_7 + 2! \times_{N+2} C_6 \\ &\quad + 3! \times_{N+2} C_7 + 3 \times 2! \times_{N+2} C_6 +_{N+2} C_5 \\ &= 12 \times_{N+2} C_8 + 18 \times_{N+2} C_7 + 8 \times_{N+2} C_6 +_{N+2} C_5 \quad \boxed{\text{答}} \end{aligned}$$

と解答が簡略化できる。

私はまもなく耳順だが, 生徒の思考には Math² 耳をすますべきだと思う良問であった。

《参考文献》

- [1] 大島 利雄: 数学書房選書 7
個数を数える, 数学書房 (2019)
- [2] チャート研究所 (編著): 増補改訂版
チャート式 基礎からの数学 I + A,
数研出版 (2018)

(鳥取県立鳥取湖陵高等学校)