

数列の和～部分和数列という名称の提案～ 読者への挑戦状

ただ 武田
まさふみ 眞史

§1. 2項の差の形を作る

次の和を求めよ。

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{99 \cdot 100}$$

中学受験では、定番の知識らしい。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{99 \cdot 100} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100} \right) \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{100} \\ &= \frac{99}{100} \end{aligned}$$

ともすると、 Σ の計算は公式に入れて解くもの、と思込んでいる生徒が多いが、「 Σ なんてただの足し算じゃないか」と思わせるために、私は、 Σ の導入でこの話をする。つまり

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

次にも、公式のない Σ の問題を組上に載せる。

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right\} \\ &= \frac{n^2 + 3n}{4(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

さらに、公式を知らないだろう和の問題を、誘導付きで出題する。

(予習をしている生徒は、3乗の和の公式は知っているが、4乗の和の公式まで覚えている生徒はいるまい。)

$$(1) \quad \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{5} - \frac{(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)}{5}$$

を因数分解せよ。

$$(2) \quad \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2)(k+3) \text{ を求めよ。}$$

(※ここまでの3例から話はさらに広がるが、それはまた別の機会に。)

結局、一般項のある数列の第 k 項と第 $(k+1)$ 項の差で表せれば、その数列の和は求まる。つまり

$$a_k = s_{k+1} - s_k \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

と表せれば

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (s_{k+1} - s_k) = s_{n+1} - s_1$$

である。

§2. 等差数列×等比数列の和

$\sum_{k=1}^n k \cdot r^{k-1} = S$ とするとき、 S の求め方は、 $S - rS$ を計算するというのが教科書的なやり方である。

生徒に、 $\sum_{k=1}^n k \cdot 3^{k-1}$ の求め方を、その方法で教えた後に、「他にも方法があるよ。考えてごらん」と言ったところ、「§1のように $k \cdot 3^{k-1} = s_{k+1} - s_k$ と変形したいけれど、上手いかわからない」と言ってきた生徒がいた。私が想定していた解き方とは違うが、その発想でも解けそう。

$$k \cdot 3^{k-1} = s'_k$$

とすると

$$\begin{aligned}s'_{k+1}-s'_k &= (k+1) \cdot 3^k - k \cdot 3^{k-1} \\ &= \{3(k+1) - k\} 3^{k-1} \\ &= 2k \cdot 3^{k-1} + 3^k\end{aligned}$$

つまり

$$k \cdot 3^{k-1} = \frac{s'_{k+1} - s'_k}{2} - \frac{3^k}{2}$$

であるから

$$\sum_{k=1}^n k \cdot 3^{k-1} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{s'_{k+1} - s'_k}{2} - \frac{3^k}{2} \right)$$

○の部分は §1 の形式、□の部分は単に等比数列の和なので、和が求まるではないか。

しかし、□の部分が出ないような、きれいに

$$k \cdot 3^{k-1} = s_{k+1} - s_k$$

となる数列 $\{s_k\}$ は作れないものだろうか。

§3. 部分和数列

実は簡単な話で、 $\frac{3^k}{2} = \frac{3^{k+1} - 3^k}{4}$ であるから

$$\begin{aligned}\text{○} - \text{□} &= \frac{s'_{k+1} - s'_k}{2} - \frac{3^{k+1} - 3^k}{4} \\ &= \frac{2s'_{k+1} - 3^{k+1}}{4} - \frac{2s'_k - 3^k}{4}\end{aligned}$$

よって

$$s_k = \frac{2s'_k - 3^k}{4} = \frac{2k \cdot 3^{k-1} - 3^k}{4} = \frac{(2k-3)3^{k-1}}{4}$$

である。

ところで、 $a_k = s_{k+1} - s_k$ と似た式で

$$b_n = a_{n+1} - a_n$$

が成立するときの数列 $\{b_n\}$ は、数列 $\{a_n\}$ の階差数列という立派な名前をもらっている。

一方で、これと逆概念の

$$a_k = s_{k+1} - s_k$$

が成立するときの、数列 $\{s_n\}$ に名前がないのは不憫ではないか、数列 $\{s_n\}$ は、数列 $\{a_n\}$ の部分和数列と言うのはどうだろう、と主張している知人がいる。私も大いに賛同する。

この原稿では、以降、独断で部分和数列という用語を使用する。

実は、この部分と数列、意外と活躍するので、是非名前を持っていて欲しいものである。

また、階差数列から、第2項以降の一般項を求める公式

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

と部分和数列から和を求める式

$$\sum_{k=1}^n a_k = s_{n+1} - s_1$$

は、添数の違いこそあるものの、本質的に同じ式である。

階差数列と部分和数列の類似性を生徒に認識させることも、大事なことではないだろうか。

さらには、 $\sum_{k=1}^n k \cdot 3^{k-1}$ を求めるときに、教科書的に

$S - 3S$ から求めるより、 $s_k = \frac{(2k-3)3^{k-1}}{4}$ から

$s_{n+1} - s_1$ として求める方が、計算のミスは少ないだろう。

§4. $\sum_{k=1}^n k \cdot a_k$

§2 で、生徒に、 $\sum_{k=1}^n k \cdot 3^{k-1}$ を求める方法として $S - 3S$ 以外の方法がある、と話したときに、私の頭の中にあったのは、次の2つの方法である。

【解法1】

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k \cdot 3^{k-1} &= 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + \cdots + (n-1) \cdot 3^{n-2} + n \cdot 3^{n-1} \\ &= 1 + \quad 3 + \quad 3^2 + \cdots + \quad 3^{n-2} + \quad 3^{n-1} \\ &\quad + \quad 3 + \quad 3^2 + \cdots + \quad 3^{n-2} + \quad 3^{n-1} \\ &\quad \quad + \quad 3^2 + \cdots + \quad 3^{n-2} + \quad 3^{n-1} \\ &\quad \quad \quad \cdots \\ &\quad \quad \quad \quad + \quad 3^{n-2} + \quad 3^{n-1} \\ &\quad \quad \quad \quad \quad + \quad 3^{n-1}\end{aligned}$$

この和の k 行目の和は

$$3^{k-1} + 3^k + \cdots + 3^{n-2} + 3^{n-1} = \frac{3^n - 3^{k-1}}{2}$$

よって、総和は

$$\sum_{k=1}^n \frac{3^n - 3^{k-1}}{2} = \frac{n \cdot 3^n - \frac{3^n - 1}{2}}{2} = \frac{(2n-1)3^n + 1}{4}$$

【解法 2】

$$\sum_{k=1}^n x^k = \frac{x^{n+1} - x}{x-1}$$

両辺を x で微分して

$$\sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{-(x^{n+1}-x) + (x-1)\{(n+1)x^n-1\}}{(x-1)^2}$$

$x=3$ を代入・整理して

$$\sum_{k=1}^n k \cdot 3^{k-1} = \frac{(2n-1)3^n + 1}{4}$$

【解法 2】の亜種として、こんな方法もある。

$$\sum_{k=1}^n 3^{kx} = \frac{3^{(n+1)x} - 3^x}{3^x - 1}$$

両辺を x で微分して

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \log 3 \cdot k \cdot 3^{kx} \\ = \log 3 \cdot \frac{-3^x \{3^{(n+1)x} - 3^x\} + (3^x - 1)\{(n+1)3^{(n+1)x} - 3^x\}}{(3^x - 1)^2} \end{aligned}$$

$x=1$ を代入・整理して

$$\sum_{k=1}^n \log 3 \cdot k \cdot 3^k = \log 3 \cdot \frac{(2n-1)3^{n+1} + 3}{4}$$

両辺を $\log 3$ で割り $\sum_{k=1}^n k \cdot 3^{k-1} = \frac{(2n-1)3^n + 1}{4}$

$\sum_{k=1}^n k \cdot a_k$ の形式の和を求めるときは、 a_k が k 個ある、と考えて【解法 1】に帰着させるか、 $(x^k)' = kx^{k-1}$ 、 $\{f(kx)\}' = kf'(kx)$ を用いて【解法 2】に帰着させるか、この 2 つの手法は、応用範囲も広い有効な方法である。

実際、【解法 1】の手法を使うと

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k(n-k+1) & \quad (n-k+1 \text{ が } k \text{ 個}) \\ = \sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)}{2} & \quad \left(\frac{k+1}{2} \text{ が } k \text{ 個}\right) \\ = \sum_{k=1}^n \frac{(n-k+1)(n+k+2)}{4} \end{aligned}$$

のような等式も理解しやすいし、二項定理

$\sum_{k=0}^n {}_nC_k x^k = (1+x)^n$ に対して【解法 2】の手法を用い

ることで、 $\sum_{k=1}^n k {}_nC_k$ も容易に求まる。

§5. 読者への挑戦状

島田荘司氏の「占星術殺人事件」というミステリ一小説の古典的傑作がある。

途中、「読者への挑戦状」というページが挟まれる。そのページまでに謎解きに必要情報はすべて提示したので、読者はここで謎解きをしてください、という挑戦状。

ちょっと真似をしてみたいな、と。

§1 から §4 までの手法で

$$\sum_{k=1}^n k \sin k\theta$$

が求まります。是非、求めてみてください。

※三角関数については、教科書に出ている公式は使います。

※読者への挑戦状は、島田荘司氏以前からありましたが、この作品の印象があまりに鮮やかだったので、紹介させていただきました。

《参考文献》

〔1〕「占星術殺人事件」島田荘司 著、講談社文庫、(1987)

(愛知県 海陽中等教育学校)