

1 次不定方程式の特殊解の求め方の考察

きたがわ あきひこ
北川 昭彦

§1. はじめに

数研通信 109 号に掲載された「1 次不定方程式の特殊解の求め方 3 種～計算メモのための効率的な記法～」において、臼井達哉先生は、「解法 2」を便利な裏技として生徒に紹介していたと述べていました。私も、特殊解を求めるのに、「解法 2」を使用させていただいています。

本稿では、「解法 2」を、漸化式を使って導きたいと思います。

§2. 基本的な考え方

参考文献[4]に掲載されている問題の類題として、以下のような問題を考えます。

【問題】

$19x+11y=1$ を満たす整数 x, y の組を 1 つ求めよ。

解答は、以下のようになります。

(一部省略しています)

$$\begin{aligned}1 &= 3 + 2 \cdot (-1) \\ &= 8 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 \\ &= 11 \cdot 3 + 8 \cdot (-4) \\ &= 19 \cdot (-4) + 11 \cdot 7\end{aligned}$$

これを下から上に見ていくと

$x=-4, y=7$ は $19x+11y=1$ の特殊解

$x=3, y=-4$ は $11x+8y=1$ の特殊解

$x=-1, y=3$ は $8x+3y=1$ の特殊解

$x=1, y=-1$ は $3x+2y=1$ の特殊解

であること、特殊解 y が、1 つ上の方程式の特殊解 x になっていることが分かります。これらの方程式から、特殊解に関する漸化式を作りました。

§3. 漸化式の導出

以下の条件で、有限数列 $\{x_k\}, \{y_k\}$ を定義します。

a, b は、 $a > b$ を満たす互いに素な自然数とする。

また、1 次不定方程式 $ax+by=r$ の特殊解を求めるために用いる互除法の回数を n とする。

$a_n=a, b_n=b$ として

a_n を b_n で割った商を q_n , 余りを r_n

$a_{n-1}=b_n, b_{n-1}=r_n$ として

a_{n-1} を b_{n-1} で割った商を q_{n-1} , 余りを r_{n-1}

……

$a_1=b_2, b_1=r_2$ として

a_1 を b_1 で割った商を q_1 , 余りを r_1

とおく。さらに

$a_nx+b_ny=r$ の特殊解を (x_n, y_n)

$a_{n-1}x+b_{n-1}y=r$ の特殊解を (x_{n-1}, y_{n-1})

……

$a_1x+b_1y=r$ の特殊解を (x_1, y_1)

とする。このとき

$a_1=b_1 \cdot q_1 + r_1$ かつ $r_1=r$ より

$$a_1 + b_1 \cdot (-q_1) = r$$

つまり $(x_1, y_1) = (1, -q_1)$

k を $2 \leq k \leq n$ を満たす自然数とする。

$$a_k = b_k \cdot q_k + r_k \text{ より } r_k = a_k - b_k \cdot q_k \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{また, } a_{k-1} = b_k \quad \cdots \cdots \textcircled{2}, \quad b_{k-1} = r_k \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

であるから

$$\textcircled{1}, \textcircled{3} \text{ より } b_{k-1} = r_k = a_k - b_k q_k \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{2}, \textcircled{4}$ を $a_{k-1}x_{k-1} + b_{k-1}y_{k-1} = r$ へ代入すると

$$b_k x_{k-1} + (a_k - b_k q_k) y_{k-1} = r$$

$$\text{つまり } a_k y_{k-1} + b_k (x_{k-1} - y_{k-1} q_k) = r$$

よって、 $k \geq 2$ のとき

$$\begin{cases} x_k = y_{k-1} \\ y_k = x_{k-1} + y_{k-1} \cdot (-q_k) \end{cases}$$

が成り立つ。

§4. 漸化式を用いて特殊解を求める

最初の【問題】の特殊解を、§3で導出した漸化式を用いて求めます。

$$19x_4 + 11y_4 = 1 \quad (19 \div 11 = 1 \text{ あまり } 8)$$

$$11x_3 + 8y_3 = 1 \quad (11 \div 8 = 1 \text{ あまり } 3)$$

$$8x_2 + 3y_2 = 1 \quad (8 \div 3 = 2 \text{ あまり } 2)$$

$$3x_1 + 2y_1 = 1 \quad (3 \div 2 = 1 \text{ あまり } 1)$$

として

$$(x_1, y_1) = (1, -1)$$

$$(x_2, y_2) = (-1, 1 + (-1) \cdot (-2)) = (-1, 3)$$

$$(x_3, y_3) = (3, -1 + 3 \cdot (-1)) = (3, -4)$$

$$(x_4, y_4) = (-4, 3 + (-4) \cdot (-1)) = (-4, 7)$$

なお、臼井先生の「解法2」の方法で記述すると1次不定方程式 $3x_1 + 2y_1 = 1$ について

	-1
0	1
	-1

より、 $x_1 = 1, y_1 = -1$ は特殊解

1次不定方程式 $8x_2 + 3y_2 = 1$ について

	-1	-2
0	1	-1
	-1	2

3より、 $x_2 = -1, y_2 = 3$ は特殊解

1次不定方程式 $11x_3 + 8y_3 = 1$ について

	-1	-2	-1
0	1	-1	3
	-1	2	-3

より、 $x_3 = 3, y_3 = -4$ は特殊解

1次不定方程式 $19x_4 + 11y_4 = 1$ について

	-1	-2	-1	-1
0	1	-1	3	-4
	-1	2	-3	4

より、 $x_4 = -4, y_4 = 7$ は特殊解

となります。

§5. 補足

私が、この研究を行ったきっかけは、本校での探究活動において、ある班が「1次不定方程式の特殊解の公式」を導こうとしたことがきっかけです。互除法を用いる回数が3回程度である問題なら、公式を導くことができたのですが、非常に複雑な計算を行っていました。また、4回以上の問題になると、公式化することが困難になってしまいました。

生徒たちは、試行錯誤を重ね、自分たちなりの漸化式を見つけることができました。その漸化式については、以下の通りです。 (x, y) の係数でなく)定数項を変化させ、特殊解に関する漸化式を導きました。

a, b を互いに素である自然数とする。ただし、 $a > b$ とする。

また、 n を自然数として

a を b で割った商を q_1 , 余りを r_1

b を r_1 で割った商を q_2 , 余りを r_2

r_1 を r_2 で割った商を q_3 , 余りを r_3

.....

r_n を r_{n+1} で割った商を q_{n+2} , 余りを r_{n+2}

さらに、1次不定方程式 $ax + by = r$ の特殊解を $(x, y) = (x_n, y_n)$ とする。

(i) $r_1 = r$ のとき

$ax + by = r_1$ の特殊解 (x_1, y_1) について

$$a = b \cdot q_1 + r_1, \text{ つまり } a \cdot 1 + b \cdot (-q_1) = r_1$$

であるから

$$(x_1, y_1) = (1, -q_1)$$

(ii) $r_2 = r$ のとき

$ax + by = r_2$ の特殊解について

$$\begin{cases} a = bq_1 + r_1 \\ b = r_1q_2 + r_2 \end{cases}$$

より $b = (a - bq_1)q_2 + r_2$

つまり、 $a \cdot (-q_2) + b \cdot (1 + q_1q_2) = r_2$ であるから

$$(x_2, y_2) = (-q_2, 1 + q_1q_2)$$

(iii) $n \geq 1$ として、 $r_{n+2} = r$ のとき

$ax + by = r_{n+2}$ の特殊解について

$$ax_n + by_n = r_n \quad \text{.....①}$$

$$ax_{n+1} + by_{n+1} = r_{n+1} \quad \text{.....②}$$

$$r_n = r_{n+1} \cdot q_{n+2} + r_{n+2} \quad \text{.....③}$$

とする。

①, ②を③へ代入すると

$$ax_n + by_n = (ax_{n+1} + by_{n+1}) \cdot q_{n+2} + r_{n+2}$$

つまり

$$a(x_n - q_{n+2}x_{n+1}) + b(y_n - q_{n+2}y_{n+1}) = r_{n+2}$$

よって

$$(x_{n+2}, y_{n+2}) = (x_n - q_{n+2}x_{n+1}, y_n - q_{n+2}y_{n+1})$$

(i)～(iii)より

1次不定方程式 $ax_n + by_n = r_n$ の特殊解 (x_n, y_n) は

$$(x_1, y_1) = (1, -q_1)$$

$$(x_2, y_2) = (-q_2, 1 + q_1q_2)$$

$n \geq 1$ のとき

$$\begin{cases} x_{n+2} = -q_{n+2}x_{n+1} + x_n \\ y_{n+2} = -q_{n+2}y_{n+1} + y_n \end{cases}$$

を満たす。

このことは【問題】において

$$19x_1 + 11y_1 = 8$$

$$19x_2 + 11y_2 = 3$$

$$19x_3 + 11y_3 = 2$$

$$19x_4 + 11y_4 = 1$$

を満たす数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ の漸化式を作ったことになります。

§6. 最後に

生徒との探究活動が行われなければ、このような漸化式を考えてみることもなかったかと思います。また、1つの題材から、複数の漸化式を作ることができ、数学的な見方を広げることができると感じました。

新課程となり、「数学A」から「整数の性質」が削除され、1次不定方程式が、大学入学共通テストで出題されなくなりました。そのため、1次不定方程式をどのタイミングで教えるかは、各学校でも検討が必要になっているかと思います。小島・臼井両先生による「解法2」の利用についても、検討してみたいかがでしょうか？

《参考文献》

- [1] 小島一義「2元1次不定方程式の特殊解の新しい求め方—ユークリッド互除法の逆行—」数研通信 No.78
- [2] 臼井達哉「「互除法の逆行」の記法の改良」数研通信 No.79
- [3] 臼井達哉「1次不定方程式の特殊解の求め方3種～計算メモのための効率的な記法～」数研通信 No.109
- [4] 「新課程 チャート式 解法と演習 数学I + A」(数研出版)

(長崎県立大村高等学校)