

日本シリーズに関する確率 2 題

～胴上げが見られる確率と試合数の期待値～

うすい たつや
白井 達哉

§1. 準備

プロ野球日本選手権シリーズ(日本シリーズ)では、先に4勝したチームが優勝となる。ここでは、チーム名を a, b , それぞれのホーム球場を A, B で表す。試合数は、最小で4試合、最大で7試合である。(ただし、引き分けはないものとする。)第1試合が、 A 球場で行われた場合を考える。その場合、以後の試合が行われる球場は、次の通りである。

試合	1	2	3	4	5	6	7
球場	A	A	B	B	B	A	A

1回の試合で、 a が b に勝つ確率を p ($0 < p < 1$), b が a に勝つ確率を q ($0 < q < 1$) とし、引き分けがないものとする

$$p + q = 1 \quad \dots\dots ①$$

A, B で優勝決定戦が見られる確率(以後、これを簡単に「胴上げの確率」と言う)をそれぞれ P_A, P_B とし、優勝決定までに A, B で行われる試合数の期待値をそれぞれ E_A, E_B とする。これらの数値が大きい方の球場を「有利である」と言う。

§2. 主題

主題は、次の2つである。

- (1) P_A と P_B のどちらが大きいのか、すなわち胴上げが見られることに関して、どちらの球場が有利か。
 - (2) E_A と E_B のどちらが大きいのか、すなわち行われる試合数に関して、どちらの球場が有利か。
- p が与えられていれば、これらは簡単に分かる。よく知られているように、 $p = \frac{1}{2}$, すなわち両チームの強さが同じ場合は、(1), (2)ともに A の方が有利である。

本稿では、2つの主題について、 p が変化するとき、2つの球場の有利・不利がどのように変化するかを調べる。

この問題を考える過程で、 p の6次式が現れる。そのため、高校1年生の知識でこれを扱うことは無理であると考えていたが、色々と試みた結果、2次関数・2次方程式の知識で解決できることが分かった。したがって、この内容は「数学A」の授業で扱うことができる。

§3. 第 n 試合で優勝が決まる確率

$$x = pq \quad \dots\dots ②$$

とおく。①, ②から q を消去すると

$$x = -p^2 + p \quad \dots\dots ③$$

$$= -\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \quad (0 < p < 1) \quad \dots\dots ④$$

④から

$$0 < x \leq \frac{1}{4} \quad \dots\dots ⑤$$

④から、両チームの強さが同じ場合、 $x = \frac{1}{4}$ である。

また、両チームの力の差が大きくなるとき、 $p \rightarrow 0$ または $p \rightarrow 1$ であるから、このとき、 $x \rightarrow 0$ となる。

第 n 試合で優勝が決まる確率を

a_n ($n=4, 5, 6, 7$) とすると、①, ②より

$$\begin{aligned} a_4 &= p^4 + q^4 = (p^2 + q^2)^2 - 2p^2q^2 \\ &= \{(p+q)^2 - 2pq\}^2 - 2p^2q^2 \\ &= (1-2x)^2 - 2x^2 \\ &= 2x^2 - 4x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_5 &= {}_4C_3 p^3 q \cdot p + {}_4C_1 p q^3 \cdot q \\
&= 4pq(p^3 + q^3) \\
&= 4pq\{(p+q)^3 - 3pq(p+q)\} \\
&= 4x(1-3x) \\
&= 4x - 12x^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_6 &= {}_5C_3 p^3 q^2 \cdot p + {}_5C_2 p^2 q^3 \cdot q \\
&= 10p^2 q^2 (p^2 + q^2) \\
&= 10p^2 q^2 \{(p+q)^2 - 2pq\} \\
&= 10x^2(1-2x) \\
&= 10x^2 - 20x^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_7 &= {}_6C_3 p^3 q^3 \\
&= 20x^3
\end{aligned}$$

§4. 胴上げの確率

2つの球場で胴上げが見られる確率は、それぞれ

$$\begin{cases} P_A = a_6 + a_7 = 10x^2 \\ P_B = a_4 + a_5 = 1 - 10x^2 \end{cases} \quad \dots\dots ⑥$$

両チームの強さが同じ場合は、 $x = \frac{1}{4}$ であるから、

⑥より $P_A = \frac{5}{8}$, $P_B = \frac{3}{8}$ となり、Aが有利である。

ここで

$$f(x) = P_A - P_B = 20x^2 - 1$$

とおくと

$$(1) \begin{cases} A \text{ が有利} \iff f(x) > 0 \\ B \text{ が有利} \iff f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = 0 \text{ とすると, ⑤より } x = \frac{1}{2\sqrt{5}} \quad \dots\dots ⑦$$

$f(x)$ のグラフより

$$(2) \begin{cases} f(x) > 0 \iff \frac{1}{2\sqrt{5}} < x \leq \frac{1}{4} \\ f(x) < 0 \iff 0 < x < \frac{1}{2\sqrt{5}} \end{cases}$$

⑦を③に代入して整理すると

$$p^2 - p + \frac{1}{2\sqrt{5}} = 0$$

$$\text{これを解くと } p = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{10}$$

これらはともに $0 < p < 1$ を満たす。

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{10}, \quad \beta = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{10}$$

とおくと、④のグラフより

$$(3) \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{5}} < x \leq \frac{1}{4} \iff \alpha < p < \beta \\ 0 < x < \frac{1}{2\sqrt{5}} \iff 0 < p < \alpha, \beta < p < 1 \end{cases}$$

(1), (2), (3) より

$$\begin{cases} A \text{ が有利} \iff \alpha < p < \beta \\ B \text{ が有利} \iff 0 < p < \alpha, \beta < p < 1 \end{cases}$$

両チームの力の差が大きくなると、 $x \rightarrow 0$ であるから、⑥より $P_A \rightarrow 0$, $P_B \rightarrow 1$

以上から、胴上げの確率について、次の結果が成り立つ。

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{10}, \quad \beta = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{10}$$

とすると

- (i) $p = \alpha, \beta$ のとき、2 球場の有利不利はない。
- (ii) $\alpha < p < \beta$ のとき、A が有利である。
- (iii) $0 < p < \alpha, \beta < p < 1$ のとき、B が有利である。
- (iv) 両チームの力の差が大きくなると、B での胴上げの確率が 1 に近づく。

(参考: $\alpha = 0.337540 \dots\dots$, $\beta = 0.662459 \dots\dots$)

§5. 試合数の期待値

2つの球場で行われる試合数とその確率は、次の通りである。

試合数	2	3	4
A の確率	$a_4 + a_5$	a_6	a_7
B の確率	a_4	$a_5 + a_6 + a_7$	0

ゆえに、行われる試合数の期待値は、それぞれ

$$\begin{cases} E_A = 2(a_4 + a_5) + 3a_6 + 4a_7 = 20x^3 + 10x^2 + 2 \\ E_B = 2a_4 + 3(a_5 + a_6 + a_7) = -2x^2 + 4x + 2 \end{cases}$$

$\dots\dots ⑧$

両チームの強さが同じ場合は、 $x = \frac{1}{4}$ であるから、

⑧より $E_A = \frac{47}{16}$, $E_B = \frac{46}{16}$ となり、A が有利である。

期待値の差は

$$E_A - E_B = a_7 - a_5 = 4x(5x^2 + 3x - 1)$$

ここで

$$g(x) = 5x^2 + 3x - 1$$

とおくと、 $x > 0$ であるから

$$(4) \begin{cases} A \text{ が有利} \iff g(x) > 0 \\ B \text{ が有利} \iff g(x) < 0 \end{cases}$$

$$g(x)=0 \text{ とすると, ⑤より } x = \frac{-3+\sqrt{29}}{10} \quad \dots\dots ⑨$$

$g(x)$ のグラフより

$$(5) \begin{cases} g(x) > 0 \iff \frac{-3+\sqrt{29}}{10} < x \leq \frac{1}{4} \\ g(x) < 0 \iff 0 < x < \frac{-3+\sqrt{29}}{10} \end{cases}$$

⑨を③に代入して整理すると

$$p^2 - p + \left(\frac{-3+\sqrt{29}}{10} \right) = 0$$

$$\text{これを解くと } p = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{55-10\sqrt{29}}}{10}$$

これらはともに $0 < p < 1$ を満たす。

$$\gamma = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{55-10\sqrt{29}}}{10}, \quad \delta = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{55-10\sqrt{29}}}{10}$$

とおくと, ④のグラフより

$$(6) \begin{cases} \frac{-3+\sqrt{29}}{10} < x \leq \frac{1}{4} \iff \gamma < p < \delta \\ 0 < x < \frac{-3+\sqrt{29}}{10} \iff 0 < p < \gamma, \delta < p < 1 \end{cases}$$

(4), (5), (6)より

$$\begin{cases} A \text{ が有利} \iff \gamma < p < \delta \\ B \text{ が有利} \iff 0 < p < \gamma, \delta < p < 1 \end{cases}$$

両チームの力の差が大きくなると, $x \rightarrow 0$ であるから, ⑧より E_A, E_B ともに 2 に近づく。

以上から, 2 球場で行われる試合数の期待値について, 次の結果が成り立つ。

$$\gamma = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{55-10\sqrt{29}}}{10}, \quad \delta = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{55-10\sqrt{29}}}{10}$$

とすると

- (i) $p = \gamma, \delta$ のとき, 2 球場の有利不利はない。
- (ii) $\gamma < p < \delta$ のとき, A が有利である。
- (iii) $0 < p < \gamma, \delta < p < 1$ のとき, B が有利である。
- (iv) 両チームの力の差が大きくなると, A と B の有利不利の差は小さくなる。

(参考: $\gamma = 0.392838 \dots\dots, \delta = 0.607161 \dots\dots$)

(i), (ii), (iii)については, 胴上げの確率と類似の結果であるが, (iv)は異なる。

§6. 最後に

p の方程式 $P_A = P_B$ と $E_A = E_B$ が, 「数学 I」の知識で解けたのは意外であった。試合数の期待値については, 微分を用いれば詳しい考察が可能であるが, 今回は高校 1 年生の授業を想定しているため, 割愛する。

今回紹介した確率 2 題は, 確率と 2 次関数・2 次方程式の融合問題として, 生徒が興味を持って考えることが期待できる。

《参考文献》

- [1] 【センター数学×野球 #1】「日本シリーズ何勝何敗だと思う？」に対する答えを考える

(2017 年 1 月 9 日)

<https://www.naoc2520.net/entry/>

2017/01/09/【センター数学】「日本シリーズ何勝何敗だと思う」

- [2] 【日本シリーズ】ホームスタートとビジタースタート, 確率的に得なのはどっち?

(2016 年 9 月 27 日)

<https://despacio.hatenablog.com/>

entry/2016/09/27/170540

(岐阜県立長良高等学校)