

# 複素数を利用した図形と方程式

ひさすえ まさき  
久末 正樹

## §1. ベクトルと複素数の対応について

よく知られているように、平面ベクトルと複素数の演算には大きな関係がある。実際、 $\vec{a}=(a_1, a_2)$  と  $\alpha=a_1+a_2i$  を対応づけることにより、平面ベクトルと複素数は、和や差や実数倍に関しては実質的に同じ計算をしているものと考えることができる。

また、 $\alpha=a_1+a_2i$ 、 $\beta=b_1+b_2i$  とし、 $\bar{\alpha}$  を  $\alpha$  の共役な複素数とすると

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}\beta &= (a_1-a_2i)(b_1+b_2i) \\ &= (a_1b_1+a_2b_2)+(a_1b_2-a_2b_1)i\end{aligned}$$

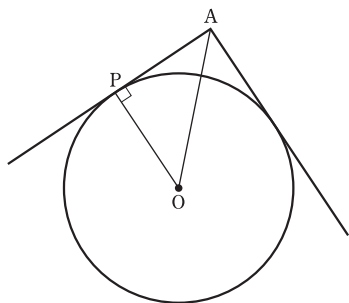
となるから、 $\vec{a}=(a_1, a_2)$ 、 $\vec{b}=(b_1, b_2)$  に対し、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \text{Re}(\bar{\alpha}\beta) = \frac{\bar{\alpha}\beta + \alpha\bar{\beta}}{2} \text{ と定めることにより、}$$

ベクトルの内積についても、複素数と対応づけることができる。ただし、 $\text{Re}$  は実部を表す。さらに、このとき、 $\text{Im}(\bar{\alpha}\beta)=a_1b_2-a_2b_1$  は外積  $\vec{a} \times \vec{b}$  になっている。ただし、 $\text{Im}$  は虚部を表している。

## §2. 円の接線

円の外部の点  $A(a)$  から、中心が原点で、半径  $r$  の円に接線を引くとき、接点を表す複素数を求める。



接点を  $P(z)$  とすると、 $P$  は円上の点であるから  $|z|=r$ 、すなわち

$$\bar{z}z = r^2 \quad \dots\dots ①$$

が成り立つ。また、 $\angle APO = \frac{\pi}{2}$  より、 $\frac{z-a}{z}$  は純

虚数であるから、 $\overline{\left(\frac{z-a}{z}\right)} = -\frac{z-a}{z}$  が成り立つ。

これを整理して

$$\bar{a}z + a\bar{z} = 2r^2 \quad \dots\dots ②$$

を得る。

②の両辺に  $z$  を掛けて、①を適用して移項すると

$$\bar{a}z^2 - 2r^2z + ar^2 = 0 \quad \dots\dots ③$$

となる。2次方程式の解の公式により、

$$z = \frac{r^2 \pm \sqrt{r^4 - \bar{a}ar^2}}{a} \text{ が得られ、根号内は実数であ}$$

る。さらに、 $A$  は円の外部の点であるから、 $|a| > r$  が成り立つので、根号内は負の実数である。よって、整理して接点を表す複素数  $z$  を得る。

$$z = \frac{r^2 \pm r\sqrt{|a|^2 - r^2}}{a}$$

なお、②の式は、ベクトルの考えを利用して求めることもできる。 $\vec{OA}$  と  $\vec{OP}$  の内積は、直線  $OP$  への正射影を考えることにより、 $|\vec{OP}|^2$  になるので、 $\text{Re}(\bar{a}z) = r^2$  が成り立つ。一般に、複素数  $z$  に対して、 $\text{Re}(z) = \text{Re}(\bar{z})$  が成り立つので、 $\text{Re}(a\bar{z}) = r^2$  と言える。また、 $\bar{a}z + a\bar{z}$  は実数であるから、 $\bar{a}z + a\bar{z} = 2r^2$  が成り立つ。

例 点  $A(5, 1)$  から、円  $x^2 + y^2 = 13$  に引いた接線と、円の接点の座標を求めよ。

【解答】

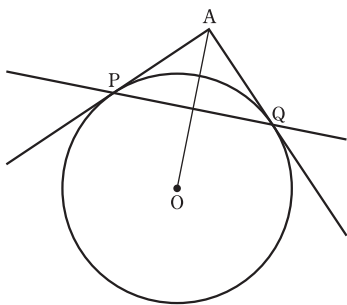
$a=5+i$ 、 $r=\sqrt{13}$  であるから、接点を表す複素数を  $z$  とすると

$$\begin{aligned}z &= \frac{13 \pm \sqrt{13}\sqrt{|5+i|^2 - 13}}{5-i} \\ &= \frac{13 \pm 13i}{5-i} \\ &= 2+3i, 3-2i\end{aligned}$$

となるので、接点の座標は  $(2, 3)$ 、 $(3, -2)$

### §3. 極線の方程式

極線とは、2つの接点を通る直線PQのことを言う。



円  $|z|=r$  において、点Aに対する極線の方程式を、複素数を用いて求めよう。接点が表す複素数をそれぞれ  $P(p)$ ,  $Q(q)$  とする。

$p, q$  は、§2の③の解であるから

$$p = \frac{r^2 - r\sqrt{|a|^2 - r^2}i}{a}, \quad q = \frac{r^2 + r\sqrt{|a|^2 - r^2}i}{a}$$

としてよい。2次方程式の解と係数の関係から

$$p+q = \frac{2r^2}{a}, \quad pq = \frac{ar^2}{a}$$

が成り立つ。

P, Q の中点は、OA と PQ の交点であり、

$$\frac{p+q}{2} = \frac{r^2}{a} \text{ である。また}$$

$$\begin{aligned} q-p &= \frac{r^2 + r\sqrt{|a|^2 - r^2}i}{a} - \frac{r^2 - r\sqrt{|a|^2 - r^2}i}{a} \\ &= \frac{2r\sqrt{|a|^2 - r^2}i}{a} \end{aligned}$$

であり、これは  $\frac{i}{a}$  と平行である。よって、直線 PQ

は、媒介変数  $t$  を用いて

$$z = \frac{r^2}{a} + t \frac{i}{a} = \frac{1}{a}(r^2 + ti)$$

すなわち、極線の方程式は次のようになる。

$$\boxed{z = \frac{1}{a}(r^2 + ti)}$$

逆に、この方程式から、 $xy$  平面上の極線の方程式を導いてみよう。

$$\bar{a}z + a\bar{z} = \bar{a} \cdot \frac{1}{a}(r^2 + ti) + a \cdot \frac{1}{a}(r^2 - ti) = 2r^2$$

が成り立つ。この式は、§2の②の式と一緒にである。

②の式は、接点を表す  $z$  の方程式であり、極線は、接点を通る直線であるから、同じ式になるのは当然

である。よって、 $\frac{\bar{a}z + a\bar{z}}{2} = r^2$  が成り立つ。ここ

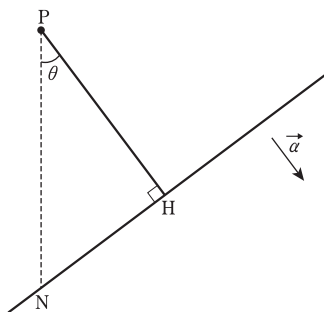
で、 $z=x+yi$ ,  $a=a_1+a_2i$  とおいて書き直すと、よく知られている極線の方程式  $a_1x+a_2y=r^2$  が得られる。

### §4. 点と直線の距離

複素数平面において、直線は一般に

$$\bar{a}z + a\bar{z} + c = 0$$

の形で書ける。ただし、 $a$  は複素数、 $c$  は実数である。点  $P(p=p_x+pyi)$  から、この直線に下した垂線 PH の長さを求めよう。



P から虚軸に平行に引いた直線と直線

$\bar{a}z + a\bar{z} + c = 0$  との交点を  $N(n=n_x+nyi)$ , また、直線の傾きを  $\tan \theta$  ( $0 < \theta < \pi$  とする) とすると、

$\angle NPH = \theta$  である。さらに、直線  $\bar{a}z + a\bar{z} + c = 0$  は、 $a=s+ti$ ,  $z=x+yi$  とおくと、

$2sx+2ty+c=0$  と表されるから、直線の法線ベクトルを  $\vec{a}$  とすると、 $\vec{a}=(\text{Re}(a), \text{Im}(a))$  である。

$$\begin{aligned} |\text{Re}(\bar{a}(n-p))| &= |\vec{a} \cdot \vec{PN}| \\ &= \|\vec{a}\| \|\vec{PN}\| \cos \theta \\ &= \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{PN}\| \cdot |\cos \theta| \\ &= \|\vec{a}\| \|\vec{PN}\| \cos \theta \\ &= \|\vec{a}\| PH \end{aligned}$$

が成り立つから、 $PH = \frac{|\text{Re}(\bar{a}(n-p))|}{\|\vec{a}\|}$  である。

PN は虚軸に平行であるから、 $n_x - p_x = 0$  が成り立ち、N は直線上の点であるから、 $2sn_x + 2tn_y + c = 0$  が成り立つ。ゆえに

$$\begin{aligned} 2\text{Re}(\bar{a}(n-p)) &= 2\text{Re}((s-ti)(n_y - p_y)i) \\ &= 2t(n_y - p_y) \\ &= -2sp_x - 2tp_y - c \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}\bar{a}p + a\bar{p} &= (s - ti)(p_x + p_y i) + (s + ti)(p_x - p_y i) \\ &= 2sp_x + 2tp_y\end{aligned}$$

であるから、 $|2\operatorname{Re}(\bar{a}(n - p))| = |\bar{a}p + a\bar{p} + c|$  が成り立つ。

以上から、次の点と直線の距離の式が成り立つ。

複素数平面上の点  $P(p)$  と直線  $\bar{a}z + a\bar{z} + c = 0$  の距離 PH は

$$PH = \frac{|\bar{a}p + a\bar{p} + c|}{2|a|}$$

実際に距離を求める場合は、この式よりも、 $a, p$  をそれぞれベクトル  $\vec{a}, \vec{p}$  に対応させて

$$PH = \frac{|2\vec{a} \cdot \vec{p} + c|}{2|\vec{a}|}$$

として適用した方が早く求まる。

例 点  $3 + 5i$  と直線  $(1 - 2i)z + (1 + 2i)\bar{z} - 6 = 0$  の距離を求めよ。

【解答】

$\vec{a} = (1, 2)$ ,  $\vec{p} = (3, 5)$  とおくと、 $2\vec{a} \cdot \vec{p} = 26$ ,  $c = -6$  であるから、求める距離は

$$\frac{|26 - 6|}{2\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

(北海道 札幌啓成高等学校)