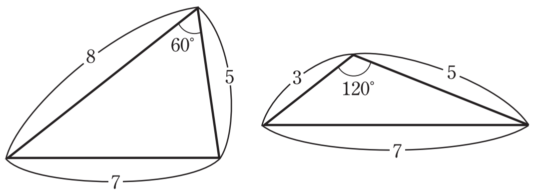
恒等式と作図による三角形の考察

木村(きむら)　嘉宏(よしひろ)

§1. はじめに

次の 2 つの三角形は，高校数学の問題でよく見かける。

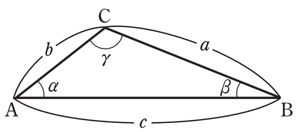


これら 60° または 120° の角を持ち，3 辺の長さが自然数の三角形について考察する。

以下，△ABC について，次のように定める。

BC$=a$，CA$=b$，AB$=c$（a，b，c は自然数）

∠BAC$=\alpha$，∠ABC$=\beta$，∠ACB$=\gamma$



このとき，正弦定理により

$$\sin\alpha=\frac{a\sin\gamma}{c},\quad \sin\beta=\frac{b\sin\gamma}{c}$$

また，余弦定理により

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad \cos\beta=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

§2. 恒等式の考察

$(s^2+2st)^2+(2st+t^2)^2-(s^2+2st)(2st+t^2)$

$=(s^2+t^2+st)^2$　……①　は恒等式であることを証明する。

【証明】

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=s^4+4s^3t+4s^2t^2+4s^2t^2+4st^3+t^4\\&\qquad-(2s^3t+5s^2t^2+2st^3)\\&=s^4+2s^3t+3s^2t^2+2st^3+t^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{右辺})&=s^4+t^4+s^2t^2+2s^2t^2+2s^3t+2st^3\\&=s^4+2s^3t+3s^2t^2+2st^3+t^4\end{aligned}$$

よって　(左辺)=(右辺)　証明終

ここで，恒等式①について

$2st+t^2=(s^2+2st)-(s^2-t^2)$

より

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=(s^2+2st)^2+\{(s^2+2st)-(s^2-t^2)\}^2\\&\qquad-(s^2+2st)\{(s^2+2st)-(s^2-t^2)\}\\&=(s^2+2st)^2+(s^2+2st)^2-2(s^2+2st)(s^2-t^2)\\&\qquad+(s^2-t^2)^2-(s^2+2st)^2+(s^2+2st)(s^2-t^2)\\&=(s^2+2st)^2+(s^2-t^2)^2-(s^2+2st)(s^2-t^2)\end{aligned}$$

同様に，$s^2+2st=(s^2-t^2)+(2st+t^2)$ より

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=\{(s^2-t^2)+(2st+t^2)\}^2+(2st+t^2)^2\\&\qquad-\{(s^2-t^2)+(2st+t^2)\}(2st+t^2)\\&=(s^2-t^2)^2+2(s^2-t^2)(2st+t^2)+(2st+t^2)^2\\&\qquad+(2st+t^2)^2-(s^2-t^2)(2st+t^2)-(2st+t^2)^2\\&=(s^2-t^2)^2+(2st+t^2)^2+(s^2-t^2)(2st+t^2)\end{aligned}$$

これらから，次の②，③は恒等式である。

$(s^2+2st)^2+(s^2-t^2)^2-(s^2+2st)(s^2-t^2)$

$=(s^2+t^2+st)^2$　……②

$(s^2-t^2)^2+(2st+t^2)^2+(s^2-t^2)(2st+t^2)$

$=(s^2+t^2+st)^2$　……③

§3. 恒等式の利用

$(s^2+2st)^2+(2st+t^2)^2-(s^2+2st)(2st+t^2)$

$=(s^2+t^2+st)^2$　……①

を利用すると，$\gamma=60°$ の △ABC ができる。

2 つの自然数 s，t に対して

$$a=s^2+2st,\quad b=2st+t^2,\quad c=s^2+t^2+st$$

とすると，a，b，c は自然数である。

このとき，a，b，c を 3 辺とする △ABC について，$a^2+b^2-ab=c^2$ より $a^2+b^2-c^2=ab$ であるから

$$\cos\gamma=\frac{ab}{2ab}=\frac{1}{2}$$

したがって，$\gamma=60°$ である。

$(s,\ t)=(2,\ 1)$，$(3,\ 1)$，$(3,\ 2)$ とすると，a，b，c は次の表のようになる。

s	t	a	b	c
2	1	8	5	7
3	1	15	7	13
3	2	21	16	19

$(s^2+2st)^2+(s^2-t^2)^2-(s^2+2st)(s^2-t^2)$
$=(s^2+t^2+st)^2$ ……②
を利用すると，$\gamma=60°$ の △ABC ができる。

$s>t$ を満たす 2 つの自然数 s，t に対して

$$a=s^2+2st,\ b=s^2-t^2,\ c=s^2+t^2+st$$

とすると，a，b，c は自然数である。

このとき，a，b，c を 3 辺とする △ABC について，$a^2+b^2-ab=c^2$ より $a^2+b^2-c^2=ab$ であるから

$$\cos\gamma=\frac{ab}{2ab}=\frac{1}{2}$$

したがって，$\gamma=60°$ である。

$(s,\ t)=(2,\ 1)$，$(3,\ 1)$，$(3,\ 2)$ とすると，a，b，c は次の表のようになる。

s	t	a	b	c
2	1	8	3	7
3	1	15	8	13
3	2	21	5	19

$(s^2-t^2)^2+(2st+t^2)^2+(s^2-t^2)(2st+t^2)$
$=(s^2+t^2+st)^2$ ……③
を利用すると，$\gamma=120°$ の △ABC ができる。

$s>t$ を満たす 2 つの自然数 s，t に対して，$a=s^2-t^2$，$b=2st+t^2$，$c=s^2+t^2+st$ とすると，a，b，c は自然数である。
このとき，a，b，c を 3 辺とする △ABC について，$a^2+b^2+ab=c^2$ より $a^2+b^2-c^2=-ab$ であるから $\cos\gamma=\frac{-ab}{2ab}=-\frac{1}{2}$

したがって，$\gamma=120°$ である。

$(s,\ t)=(2,\ 1)$，$(3,\ 1)$，$(3,\ 2)$ とすると，a，b，c は次の表のようになる

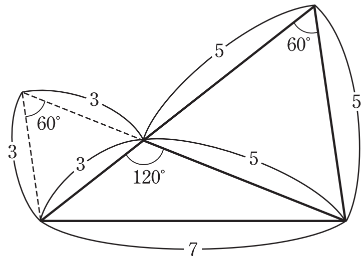
s	t	a	b	c
2	1	3	5	7
3	1	8	7	13
3	2	5	16	19

§4. 60° の三角形と 120° の三角形の関係

§1 で例示した 2 つの三角形は，次のように関連付けられる。

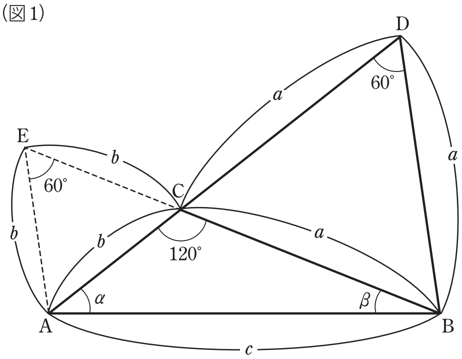
図のように，3 辺の長さが 3，5，7 の三角形に，一辺の長さが 5 の正三角形を接合すると，60° の角を持つ 3 辺の長さが 5，8，7 の三角形が得られる。

また，一辺の長さが 3 の正三角形を接合すると，60° の角を持つ 3 辺の長さが 3，8，7 の三角形が得られる。



$\gamma=120°$ である △ABC に一辺の長さが a の正三角形 BCD を接合すると，60° の角を持つ 3 辺の長さが，a，$a+b$，c の △ABD が得られる。一辺の長さが b の正三角形 ACE を接合すると，60° の角を持つ 3 辺の長さが b，$a+b$，c の △BAE が得られる。

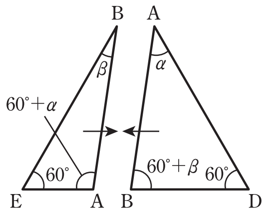
（図 1）

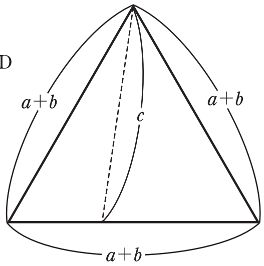


（図 1）について，$\alpha+\beta=180°-120°=60°$，$\angle BAE=60°+\alpha$，$\angle ABD=60°+\beta$ であるから

$$\angle BAE+\angle ABD=120°+\alpha+\beta=180°$$

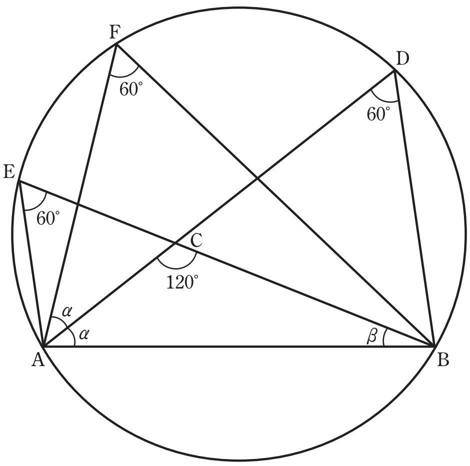
よって，△ABD と △BAE を接合すると，1 辺の長さが $a+b$ の正三角形になる。





§5. 外接円を用いて

(図１)について，△ABD と △BAE は同一の外接円を持つ。



図のように，外接円の A，B を含まない弧 DE 上に，$\angle\mathrm{DAF}=\alpha$ となる点Fをとると，

$\angle\mathrm{BAF}=\alpha+\alpha=2\alpha$，$\angle\mathrm{AFB}=60^\circ$ である。

ここで，$\beta=60^\circ-\alpha$ より

$$
\begin{aligned}
\angle\mathrm{ABF}&=180^\circ-60^\circ-2\alpha\\
&=120^\circ-2\alpha\\
&=2(60^\circ-\alpha)\\
&=2\beta
\end{aligned}
$$

△ABC について

$$\sin\alpha=\frac{a\sin 120^\circ}{c}=\frac{\sqrt{3}\,a}{2c}$$

$$\sin\beta=\frac{b\sin 120^\circ}{c}=\frac{\sqrt{3}\,b}{2c}$$

余弦定理により

$$c^2=a^2+b^2+ab$$

$$
\begin{aligned}
\cos\alpha&=\frac{b^2+(a^2+b^2+ab)-a^2}{2bc}\\
&=\frac{b(a+2b)}{2bc}\\
&=\frac{a+2b}{2c}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos\beta&=\frac{(a^2+b^2+ab)+a^2-b^2}{2ca}\\
&=\frac{a(2a+b)}{2ca}\\
&=\frac{2a+b}{2c}
\end{aligned}
$$

２倍角の公式により

$$
\begin{aligned}
\sin 2\alpha&=2\sin\alpha\cos\alpha\\
&=2\times\frac{\sqrt{3}\,a}{2c}\times\frac{a+2b}{2c}\\
&=\frac{\sqrt{3}\,(a^2+2ab)}{2c^2}
\end{aligned}
$$

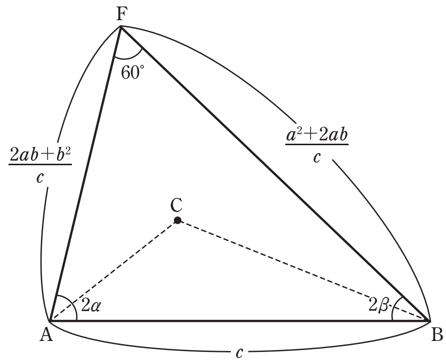
$$
\begin{aligned}
\sin 2\beta&=2\sin\beta\cos\beta\\
&=2\times\frac{\sqrt{3}\,b}{2c}\times\frac{2a+b}{2c}\\
&=\frac{\sqrt{3}\,(2ab+b^2)}{2c^2}
\end{aligned}
$$

したがって，△ABF について，正弦定理により

$$\frac{\mathrm{BF}}{\sin 2\alpha}=\frac{\mathrm{AF}}{\sin 2\beta}=\frac{c}{\sin 60^\circ}=\frac{2c}{\sqrt{3}}$$

$$\mathrm{BF}=\frac{2c}{\sqrt{3}}\times\sin 2\alpha=\frac{a^2+2ab}{c}$$

$$\mathrm{AF}=\frac{2c}{\sqrt{3}}\times\sin 2\beta=\frac{2ab+b^2}{c}$$



なお，点Cは ∠BAF，∠ABF の２等分線の交点であるから，△ABF の内心である。

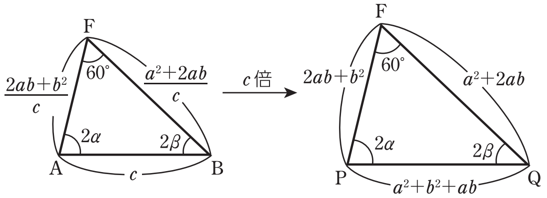
§6. 補足として

§5の △ABF の 3 辺をそれぞれ c 倍した △PQF は

$\mathrm{QF}=a^2+2ab$, $\mathrm{FP}=2ab+b^2$

$\mathrm{PQ}=c^2=a^2+b^2+ab$

で 3 辺は自然数になる。



△PQF において，∠PFQ＝60° であるから，余弦定理により

$\mathrm{QF}^2+\mathrm{FP}^2-\mathrm{QF}\cdot\mathrm{FP}=\mathrm{PQ}^2$

$(a^2+2ab)^2+(2ab+b^2)^2-(a^2+2ab)(2ab+b^2)$
$=(a^2+b^2+ab)^2$

は恒等式①である。

（京都府立峰山高等学校）