

「ツェラーの公式」の月による日数(曜日)のずれを求める式について

たき まさゆき
瀧 真幸

§1. はじめに

数学Aの教科書に「ツェラーの公式」の紹介がありました。30年ほど前、工業高校に勤務していた頃、「ポケコン」にBASICで「ツェラーの公式」のプログラムを入力し、生徒の誕生日の曜日当てをして楽しんだことを思い出しました。「ツェラーの公式」の、年による日数のずれを求める式は容易に理解できましたが、月による日数のずれを求める式についてはすぐには分かりませんでした。当時、自分なりに、どのようにしてその式が得られたのかを考えたものをまとめてみました。

§2. ツェラーの公式

以下、 $[]$ はガウス記号とする。
西暦 y 年 m 月 d 日の曜日を ω とし、 $y=100c+n$ ($1583 \leq y \leq 3999$) とする。

また、1, 2月のときは、 $y=y-1$ とし、1月を $m=13$, 2月を $m=14$ とする。

【ツェラーの公式】

$$\omega \equiv \left[\frac{c}{4} \right] - 2c + n + \left[\frac{n}{4} \right] + \left[\frac{26(m+1)}{10} \right] + d - 1 \pmod{7}$$

ω	0	1	2	3	4	5	6
曜日	日	月	火	水	木	金	土

(1583年1月1日は土曜日で、 $\omega=6$ となる。)

上の公式の簡単な説明をする

$\left[\frac{c}{4} \right] \cdots 400$ の倍数年は閏年であるから、 $100c$ 年間で $\left[\frac{c}{4} \right]$ 日ずれる。

$-2c \cdots 100$ 年間で、閏年は $25-1=24$ (回)
(400の倍数年以外の100の倍数年は、平年であるから1を引く)
1年で1日ずつずれるので、100年間で合わせて

$$100+24=124 \equiv 5 \equiv -2 \pmod{7}$$

よって、 $100c$ 年間で $-2c$ 日ずれる。

$n + \left[\frac{n}{4} \right] \cdots 100$ 年未満の日数のずれ。1年で1日ずれ、4の倍数年は閏年でさらに1日ずれるので、 n 年で $n + \left[\frac{n}{4} \right]$ 日ずれる。

$\left[\frac{26(m+1)}{10} \right] \cdots$ 月による日数のずれを表す式。

$d-1 \cdots d$ は m 月の日数。基準日が土曜日なので、 $\omega=6$ となるように1を引いて調整した式。

§3. ツェラーの公式における月による日数(曜日)のずれを求める式について

ツェラーの公式における、月による日数(曜日)のずれを求める式は

$$\left[\frac{26(m+1)}{10} \right] \pmod{7} \quad (3 \leq m \leq 14) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

です。ツェラー氏がどのようにしてこの式を導き出したのか分かりませんが、自分なりに考察してみました。

まず、(表1)のように、3月から始めて5ヶ月ごとの月の日数を並べると、31と30がきれいに交互に並びます。

(2(14)月は最終月なので、考える必要はないです。)

(表1)

1 巡目	3 月	4 月	5 月	6 月	7 月
月の日数	31	30	31	30	31
2 巡目	8 月	9 月	10 月	11 月	12 月
月の日数	31	30	31	30	31
3 巡目	1(13)月	2(14)月			
月の日数	31	28(29)			

よって、各月の日数を7で割った余りは(表2)になります。

(表2)

1 巡目	3 月	4 月	5 月	6 月	7 月
mod 7	3	2	3	2	3
2 巡目	8 月	9 月	10 月	11 月	12 月
mod 7	3	2	3	2	3
3 巡目	1(13)月	2(14)月			
mod 7	3				

閏年による日数のずれは他の式で求めているので、1月は3日、2月は0日のずれがあり、1、2月で③日ずれます。

1 巡目は

$m=3$ のとき (2月までのずれ) $\cdots$ ③=3

$m=4$ のとき (3月までのずれ) $\cdots$ ③+3=6

$m=5$ のとき (4月までのずれ) $\cdots$ ③+3+2=8

$m=6$ のとき (5月までのずれ) $\cdots$ ③+3+2+3=11

$m=7$ のとき (6月までのずれ) $\cdots$

$$\text{③}+3+2+3+2=13$$

$m=8$ のとき (7月までのずれ) $\cdots$

$$\text{③}+3+2+3+2+3=16$$

3と2の和となっていますが、 $m=8$ のときの5ヶ月間の加える数の平均を求めると

$$\frac{13}{5}=2.6$$

となります。

これを使った m 月の日数のずれの近似式を

$$2.6(m-3)+\text{③} \quad \cdots \cdots \text{②}$$

とします。

実際のずれと、②との誤差は(表3)のようになります。

(表3)

m	実際のずれ	②の値	誤差	②+0.4
3	3	3	0	3.4
4	6	5.6	-0.4	6
5	8	8.2	0.2	8.6
6	11	10.8	-0.2	11.2
7	13	13.4	0.4	13.8
8	16	16	0	16.4

($m=3\sim 8$ の場合)

(表3)

m	実際のずれ	②の値	誤差	②+0.4
9	19	18.6	-0.4	19
10	21	21.2	0.2	21.6
11	24	23.8	-0.2	24.2
12	26	26.4	0.4	26.8
13	29	29	0	29.4
14	32	31.6	-0.4	32

($m=9\sim 14$ の場合)

誤差は -0.4 から 0.4 ですから、ここでは、補正值として 0.4 を加えると、(表3)の右端のようになり、整数部分が実際のずれと一致します。したがって、月による日数のずれを求める式は次のようになります。(+7 はなくてもよいのですが、①と同じ式にするために必要になります。)

$$\begin{aligned} & [2.6(m-3)+3+0.4+7] \quad \cdots \cdots \text{③} \\ &= \left[\frac{26(m-3)+30+4+70}{10} \right] \\ &= \left[\frac{26m-78+104}{10} \right] \\ &= \left[\frac{26m+26}{10} \right] \\ &\equiv \left[\frac{26(m+1)}{10} \right] \pmod{7} \quad (3 \leq m \leq 14) \end{aligned}$$

よって、①が得られました。

仮に、②において、2.6ではなく3と2の平均2.5を用いると、近似式は

$$2.5(m-3)+\text{③}$$

となりますが、誤差の範囲 h が $-1.5 \leq h \leq 0$ となり、整数部分をそろえる補正值をうまく選ぶことができません。

§4. ツェラーの公式における月による日数

(曜日)のずれを求める式は1つではない

③では、7を加えた式となっていますが、なくてもよく、その場合は

$$\left[\frac{26m-44}{10} \right] \pmod{7}$$

となり、別の式が得られます。また、(表3)を見ると、補正値は0.4以上で0.6未満であればよいことが分かります。

例えば、補正値を0.5をすると、③は

$$\begin{aligned} & [2.6(m-3)+3+0.5+7] \\ &= \left[\frac{26(m-3)+30+5+70}{10} \right] \\ &= \left[\frac{26m-78+105}{10} \right] \\ &\equiv \left[\frac{26m+27}{10} \right] \pmod{7} \end{aligned}$$

となります。このように、色々な式が得られますが、やはり①が計算しやすく簡潔な式のように見えます。きっと、ツェラー氏もそう考えて①にしたのではないのでしょうか。(そもそも、①は約分できるのにあえてしていません。)

§5. 月による日数(曜日)のずれを求める式(1)

全く別の考え方で、月による日数のずれを表す式はないのかも考えてみました。

(表2)から、3と2を交互に足していくことで、5ヶ月ごとの月による日数のずれを求められることが分かります。1, 2月のずれ③を除いた日数のずれの和を、 $\{a_i\}$ とすると

(1巡目)

$$\begin{array}{ll} a_1=0 & (m=3) \\ a_2=3 & (m=4) \\ a_3=3+2 & (m=5) \\ a_4=3+2+3 & (m=6) \\ a_5=3+2+3+2 & (m=7) \end{array}$$

(2巡目)

$$\begin{array}{ll} a_6=13+0 & (m=8) \\ a_7=13+3 & (m=9) \\ a_8=13+3+2 & (m=10) \\ a_9=13+3+2+3 & (m=11) \\ a_{10}=13+3+2+3+2 & (m=12) \end{array}$$

(3巡目)

$$\begin{array}{ll} a_{11}=13+2+0 & (m=13) \\ a_{12}=13+2+3 & (m=14) \end{array}$$

となっています。 $l=1, 2, 3, 4, 5$ のときの $\{a_l\}$ の階差数列を $\{b_l\}$ とし、さらに、 $\{b_l\}$ の階差数列を $\{c_l\}$ とすると

$$\{b_l\}: 3, 2, 3, 2$$

$$\{c_l\}: -1, 1, -1$$

となっているので、 $c_l=(-1)^l$ より

$$\begin{aligned} l \geq 2 \text{ のとき } b_l &= 3 + \sum_{k=1}^{l-1} (-1)^k \\ &= 3 + (-1) \cdot \frac{1 - (-1)^{l-1}}{1 - (-1)} \\ &= 3 - \frac{1}{2} \{1 - (-1)^{l-1}\} \\ &= \frac{5}{2} + \frac{1}{2} (-1)^{l-1} \end{aligned}$$

(初項は $b_1=3$ であるから、 $l=1$ のときにも成り立つ。)

よって

$$\begin{aligned} l \geq 2 \text{ のとき } a_l &= 0 + \sum_{k=1}^{l-1} \left\{ \frac{5}{2} + \frac{1}{2} (-1)^{k-1} \right\} \\ &= \frac{5}{2} (l-1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - (-1)^{l-1}}{1 - (-1)} \\ &= \frac{5}{2} (l-1) + \frac{1}{4} \{1 - (-1)^{l-1}\} \\ &= \frac{5}{2} l - \frac{5}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot (-1)^l \\ &= \frac{1}{4} (-1)^l + \frac{5}{2} l - \frac{9}{4} \\ &= \frac{(-1)^l + 10l - 9}{4} \end{aligned}$$

(初項は $a_1=0$ であるから、 $l=1$ のときにも成り立つ。)

1巡目の3月、2巡目の8月、3巡目の13月で $l=1$ にリセットしたいので

$$l = m - 2 - 5 \left[\frac{m-3}{5} \right]$$

とします。

また、(表2)の2巡目は、1巡目の和13を加え、3巡目は、さらに2巡目の和13を加えていくので

$$13 \left[\frac{m-3}{5} \right]$$

が必要になります。

以上から

【月による日数のずれを求める式(1)】

$$\frac{(-1)^l + 10l - 9}{4} + 13 \left[\frac{m-3}{5} \right] + [3] \pmod{7}$$

$$\text{ただし, } l = m - 2 - 5 \left[\frac{m-3}{5} \right]$$

§6. 月による日数(曜日)のずれを求める式(2)

(表2)の1巡目は(m を l に置き換えてあります。)

$l=3$ のとき(2月までのずれ)… $[3]$

$l=4$ のとき(3月までのずれ)… $[3]+3$

$l=5$ のとき(4月までのずれ)… $[3]+3+2$

$l=6$ のとき(5月までのずれ)… $[3]+3+2+3$

$l=7$ のとき(6月までのずれ)… $[3]+3+2+3+2$

となっていますが、3は $l=3$ で0個、 $l=4, 5$ で1個、 $l=6, 7$ で2個加えているので、3を加えた和は

$$3 \left[\frac{l-2}{2} \right]$$

2は $l=3, 4$ で0個、 $l=5, 6$ で1個、 $l=7$ で2個加えているので、2を加えた和は

$$2 \left[\frac{l-3}{2} \right]$$

§5と同様に、(表2)の2巡目は、1巡目の和13(7月までの和)を加え、3巡目は、さらに2巡目の和13を加えていくので、やはり

$$13 \left[\frac{m-3}{5} \right]$$

が必要になります。

また、2巡目の8月、3巡目の13月で $l=3$ にリセットしなければならないので

$$l = m - 5 \left[\frac{m-3}{5} \right]$$

となります。

以上から

【月による日数のずれを求める式(2)】

$$3 \left[\frac{l-2}{2} \right] + 2 \left[\frac{l-3}{2} \right] + 13 \left[\frac{m-3}{5} \right] + [3] \pmod{7}$$

$$\text{ただし, } l = m - 5 \left[\frac{m-3}{5} \right]$$

§7. おわりに

「ツェラーの公式」の①以外の式が正しいことは、エクセルのTEXT関数などですぐに確認でき、今は簡単に任意の日付の曜日を知ることができます。(ただし、1900年より前の曜日は表示されないようです。)

しかし、試行錯誤して曜日を求める式を考えるのも面白いと思います。結局、「ツェラーの公式」の①が優れた式であることもよく分かりました。

余談ですが、31日に満たない月は「西向く土(さむらい)」と覚えたものですが、知っている生徒は少なく、今は「げんこつの指の付け根」に交互に現れる山と谷を利用して覚える方が一般的なようです。そんなところにも隔世の感を覚えました。

《参考文献》

〔1〕「最新 数学A」数研出版

〔2〕「暦と占いの科学」永田 久 著、新潮選書、(1982)

(静岡県立富岳館高等学校)