三角形の3辺から内接円，外接円の面積を求める問題の周辺

堂薗（どうぞの）　幸夫（ゆきお）

§1. はじめに

鹿児島大学の2023年度前期理系の入試問題の第1問(1)は，次のような問題であった。本稿は，その問題に関して，考察を進めたレポートである。

§2. 問題と模範解答例

【実際の問題】

3辺の長さがそれぞれ2，4，$2\sqrt{5}$ である三角形に内接する円の面積を求めよ。

（2023　鹿児島大学）

【解説】

第1問の最初の出題であり，小手調べのような，準備運動のような問題である。ただし，それは「**この三角形が直角三角形である**」という特殊な状況を見抜いたならば，という前提であり，もし直角三角形でなければ，それなりに手間のかかる問題であった。その手間のかかる部分を丁寧に変形してみた。

§3. 公式を作ることが出来た？その1（内接円）

3辺の長さが分かっているならば，三角形の面積はもちろん，外接円，内接円の面積も一意に決定する。

一般的に，辺の長さが a，b，c であるとき，内接円の面積を求める公式(？)を作ることが出来るはずである。

△ABCの面積 S は，内接円の半径を r とすると

$$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$$

で表される。

また，ヘロンの公式から

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ただし，$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$

ともかけるので

$$rs=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

となり

$$r^2=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}$$

と変形される。

よって，内接円の面積を T とし，

$T=\pi r^2$ を，a，b，c だけで表すと

$T=\pi\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}$ より

$$T=\pi\frac{\left\{\frac{1}{2}(a+b+c)-a\right\}\left\{\frac{1}{2}(a+b+c)-b\right\}\left\{\frac{1}{2}(a+b+c)-c\right\}}{\frac{1}{2}(a+b+c)}$$

$$=\pi\frac{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{4(a+b+c)}$$

という，新たな公式(？)が出来上がった。

【考察】

3辺の長さ a，b，c だけで，内接円の面積を表現しようと試みているため，かなり不格好な公式もどきが出来上がった。しかし，この分子の部分に着目すると，三角形の成立条件が見事に並んでおり，「**三角形が出来なければ T も存在することが出来ない**」ということを表しており興味深い。

§4. 公式を作ることが出来た？その2（外接円）

では，この鹿児島大学の問題とはやや離れるが，その系として，外接円の面積を求める公式（？）も作ってみた。

外接円の半径を R とする。

△ABC の面積 S は，$S=\frac{1}{2}bc\sin A$ であり

正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=2R$ より　　$R=\frac{abc}{4S}$

内接円と同様に，ヘロンの公式から

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ただし，$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$

$R^2=\frac{a^2b^2c^2}{16s(s-a)(s-b)(s-c)}$ と変形される。

よって，内接円の面積を U とし

$U=\pi R^2$ を，a，b，c だけで表すと

$U=\pi\frac{a^2b^2c^2}{16s(s-a)(s-b)(s-c)}$ より

$$U=\pi\frac{a^2b^2c^2}{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}$$

という，新たな公式（その2？）が出来上がった。

【考察】

3辺の長さ a，b，c だけで，外接円の面積を表現しようと試みているため，こちらも同様にかなり不格好な公式もどきが出来上がった。しかし，今度はこの分母の部分に着目すると，三角形の成立条件が見事に並んでおり，同様に「**三角形が出来なければ U も存在することが出来ない**」ということを表しており興味深い。

また，先ほどの公式もどきと，分子部分と分母部分の三角形の成立条件が逆になっているということは，例えば，$a+b\fallingdotseq c$ のように，ほぼ三角形の形状を成さない場合，つまり，$a+b-c\to 0\,(>0)$ のようなとき，内接円の面積は，$T\to 0$，一方，外接円の面積は，$U\to\infty$ を表すことになり，我々の実感と見事に合う。これは，さらに興味深いものである。

§5. せっかく作った公式で内接円の面積の鹿大問題を解く

せっかく公式を作ったので，最初の鹿児島大学の問題を，この公式で解いてみると，$a=2$，$b=4$，$c=2\sqrt{5}$ より

$a+b+c=6+2\sqrt{5}$，$a+b-c=6-2\sqrt{5}$，

$b+c-a=2+2\sqrt{5}$，$c+a-b=-2+2\sqrt{5}$

よって

$$T=\pi\frac{(6-2\sqrt{5})(2+2\sqrt{5})(-2+2\sqrt{5})}{4(6+2\sqrt{5})}$$

（和差の積は，2乗の差で非常に計算しやすい）

$$=\pi\frac{(36-24\sqrt{5}+20)(20-4)}{4\cdot(36-20)}=\pi\frac{56-24\sqrt{5}}{4}$$

$$=2(7-3\sqrt{5})\pi$$

（もちろん正解，公式があると意外に早い）

§6. 外接円の面積は

せっかくなので，外接円の面積も公式もどきで求めてみると，$a=2$，$b=4$，$c=2\sqrt{5}$ より

$a^2b^2c^2=4\cdot16\cdot20$，$a+b+c=6+2\sqrt{5}$，

$a+b-c=6-2\sqrt{5}$，$b+c-a=2+2\sqrt{5}$

$c+a-b=-2+2\sqrt{5}$　　よって

$$U=\pi\frac{4\cdot16\cdot20}{(6+2\sqrt{5})(6-2\sqrt{5})(2+2\sqrt{5})(-2+2\sqrt{5})}$$

$$=\pi\frac{4\cdot16\cdot20}{16\cdot16}=5\pi$$

（しかし，△ABC は直角三角形であるから，実は，半径は $\frac{c}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$ であり，$S=\pi r^2$ より秒殺できる。）

§7. 外接円の面積と内接円の面積比は…

内接円と外接円の面積を求めたので，比を求めてみると面白そうな気がした。この問題では

$$\frac{U}{T}=\frac{5\pi}{2(7-3\sqrt{5})\pi}=\frac{5(7+3\sqrt{5})}{8}\fallingdotseq 8.57$$

となるが，一般的には，公式もどきの比をとり

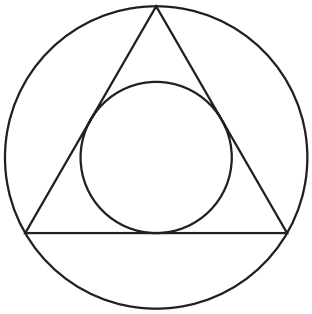
$$\frac{U}{T}=\frac{\pi\dfrac{a^2b^2c^2}{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}}{\pi\dfrac{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{4(a+b+c)}}$$

$$=\frac{4a^2b^2c^2}{(a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2}$$

が言える。

例として，正三角形では，$a=b=c=1$ とすると，$\dfrac{U}{T}=4$ となることが分かる。

さらに，せっかくなので作図してみた。



4：1が内包されている，美しい図形になる。

この分数 $\dfrac{U}{T}$ は，$\dfrac{(\text{外接円の面積})}{(\text{内接円の面積})}$ である。1次元と2次元の関係から，

$\sqrt{\text{面積比}}=\text{半径比}$ になるので，$\sqrt{\dfrac{U}{T}}=\dfrac{R}{r}$ となっている。

つまり，前述の正三角形は特殊な場合であり，

$U:T=4:1$ であるから，$R:r=2:1$ である。

$$\frac{R}{r}=\sqrt{\frac{U}{T}}=\frac{2abc}{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}$$

この式について，さらに考察を進めると，

$x>0$，$y>0$，$z>0$ のとき，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$x+y\geqq 2\sqrt{xy},\quad y+z\geqq 2\sqrt{yz},\quad z+x\geqq 2\sqrt{zx}$$

辺々をかけ合わせて

$$(x+y)(y+z)(z+x)\geqq 2\cdot 2\cdot 2(\sqrt{x})^2(\sqrt{y})^2(\sqrt{z})^2$$

が成り立ち

$$(x+y)(y+z)(z+x)\geqq 8xyz \qquad \cdots\cdots(*)$$

が言える。等号が成り立つのは，$x=y=z$ のときである。

ここで，$x=a+b-c$……①，$y=b+c-a$……②，$z=c+a-b$……③ とおき，辺々を加えると

$$x+y+z=a+b+c$$

である。

これより

$a+b=x+y+z-c$ を①に代入して

$x=x+y+z-c-c$ より　　$2c=y+z$　…④

$b+c=x+y+z-a$ を②に代入して

$y=x+y+z-a-a$ より　　$2a=z+x$　…⑤

$c+a=x+y+z-b$ を③に代入して

$z=x+y+z-b-b$ より　　$2b=x+y$　…⑥

ここで，$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\leqq abc$

$(a>0,\ b>0,\ c>0)$ を示す。

対称性より，$0<a\leqq b\leqq c$ としても一般性は失われない。

$b+c-a>0$ であり，$c-b\geqq 0$ より

$c+a-b\geqq a$ だから $c+a-b>0$ が言える。

〔1〕 $a+b-c>0$ のとき，①，②，③より

$x>0$，$y>0$，$z>0$ となるので

$(*)$に①～⑥を代入して

$$8(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\leqq 2b\cdot 2c\cdot 2a$$

が成り立ち

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\leqq abc$$

が成立する。

〔2〕 $a+b-c\leqq 0$ のとき

左辺は，$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\leqq 0$ であり，右辺は，$abc>0$ である

よって，$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\leqq abc$

が成り立つ。

よって，〔1〕，〔2〕より

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\leqq abc$$

が成立する。

以上の証明から，$\dfrac{R}{r}\geqq 2$，$\dfrac{U}{T}\geqq 4$ という関係が言える。

さらに，発展形(＝簡略形)として，3変数のうち2変数を固定したとき，つまり，$b=c=1$ の二等辺三角形で，a のみを変数と考えてみると

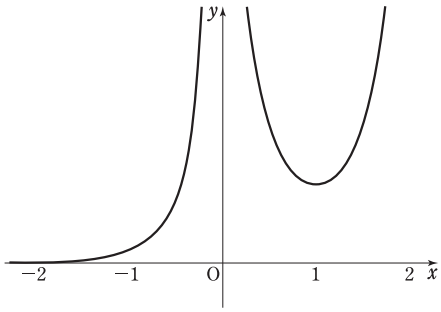
$$\frac{U}{T}=\frac{4a^2b^2c^2}{(a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2}$$

は

$$f(x)=\frac{4x^2}{x^2(2-x)^2x^2}=\frac{4}{x^2(2-x)^2}$$

という関数になる。

グラフ化すると次の通りである。



§8. この発想は，他大学でも……

面白い関係性があるので，類題があるのではと思い，調べてみたら，意外に最近出題されていた。やはり，面白そうなネタにはみなさん敏感なのであろう。

山口大学前期 2016 年入試3の出題

△ABC において，辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ a，b，c で表すとき，次の問いに答えよ。

(1) △ABC の外接円の半径を R とするとき，△ABC の面積を a，b，c，R を用いて表せ。

(2) △ABC の内接円の半径を r とするとき，△ABC の面積を a，b，c，r を用いて表せ。

(3) △ABC の外接円と内接円の面積をそれぞれ S_1，S_2 とするとき，$\dfrac{S_1}{S_2}$ を a，b，c を用いて表せ。

(2016　山口大学)

§9. まとめ

このレポートは，数Ⅰの練習問題として扱っても適当であると思われる。探究的学習の意味も含まれており，数学好きを育てたいものである。

http：//www.synapse.ne.jp/dozono/

上記の私のホームページにおいて，様々な問題について動画データや GRAPES データを公開している。興味ある方はご覧いただいて，ご指摘やご教授頂けると幸いである。

《参考文献》

〔1〕 2024 年受験用　全国大学入試問題正解 ⑤数学(国公立大編) 旺文社(2023)

〔2〕『2016 年版　数学Ⅰ・Ⅱ・A・B 入試問題集(理系)』数研出版

〔3〕 オイラーの不等式 | Desmos https：//www.desmos.com/calculator/n9akdhbgby?lang=ja

(鹿児島県立串木野高等学校)