『設定の吟味』についての考察
～多面的な見方を通して～

五十嵐(いがらし)　正晴(まさはる)

§1. はじめに

『**やまぐち数学・進路指導研究会**』という，有志の教員によって定期的に開催されている非公式の研究会がある。その中で，次の①，②を生徒に伝えるためにはどうすればよいか考えるきっかけがあった。

①　**多面的に見ることのよさ**
②　**設定を吟味することの大切さ**

生徒がこれらを実感できるような指導を，平素から実践されている先生は大勢いらっしゃるだろう。この2つの項目を実感できる問題をいくつか議論したため，本稿では，そのうちの1問をお示ししたい。

§2. 設定の吟味

問題をお示しする前に，②の『**設定を吟味する**』とはどういうことか。これについては，正解というものがなく，それぞれの考え方に委ねられると思われるが，私自身は次の2つのことを表すと考えた。

問題設定の吟味 **（構成の吟味）**	**条件設定の吟味** **（題材の吟味）**

問題設定の吟味（構成の吟味）とは，どのような意図でその問題が作成されているかを吟味することである。これについては『**誘導**』という言葉でしばしば表現される。マーク式の問題では，特にこの吟味が重要性を増すが，記述式の問題においても，出題者がどのような意図でその問題を構成しているかを検討することは重要である。小問が複数設定されている問題において，特に留意するべきだろう。

条件設定の吟味（題材の吟味）とは，その問題に対して，どのような手法を用いて解答を導き出すのが効果的であるかを吟味することである。これは，単に別解を考えるだけではなく，解析的な解法，代数的な解法，幾何的な解法，どの解法が効果的であるかを考えたり，出題者がどの解法を想定しているかを考えたりすることなどが重要であるという主張である。計算量・記述量の減少により，解答時間が大幅に短縮されるといった恩恵が得られることがあるため，誤答の可能性を減らすことに繋がるだろう。

§3. 問題と解答

【問題】　n は自然数とする。
⑴　$n \geqq 4$ のとき，不等式 $2^n \geqq n^2$ が成り立つことを証明せよ。
⑵　$n \geqq 3$ のとき，不等式 $3^n \geqq n^3$ が成り立つことを証明せよ。

作問した中で，最もシンプルで易しい問題を本稿では選択した。この問題に対して，8つの解法を示す。若干略解となっている点はご了承いただきたい。

【解答①】　＜数学的帰納法＞

⑴　$n=4$ のとき，この不等式は成り立つ。

$k \geqq 4$ として，$n=k$ のとき，この不等式が成り立つと仮定する。

$n=k+1$ のときを考えると

$$\begin{aligned} 2^{k+1}-(k+1)^2 &\geqq 2k^2-(k+1)^2 \\ &= k^2-2k-1 \\ &= (k-1)^2-2 \\ &> 0 \quad (k \geqq 4) \end{aligned}$$

⑵　$n=3$ のとき，この不等式は成り立つ。

$k \geqq 3$ として，$n=k$ のとき，この不等式が成り立つと仮定する。

$n=k+1$ のときを考えると

$$\begin{aligned} 3^{k+1}-(k+1)^3 &\geqq 3k^3-(k+1)^3 \\ &= 2k^3-3k^2-3k-1 \\ &> 2k^3-3k^2-3k-5 \end{aligned}$$

$=2k^3-2-3(k^2+k+1)$
$=2(k-1)(k^2+k+1)-3(k^2+k+1)$
$=(2k-5)(k^2+k+1)$
$>0\ (k\geqq 3)$

【解答②】　＜階差数列＞

(1)　$a_n=2^n-n^2$ とし，$b_n=a_{n+1}-a_n$，$c_n=b_{n+1}-b_n$ とする。$(n\geqq 4)$

$b_n=\{2^{n+1}-(n+1)^2\}-(2^n-n^2)$
$=2^n-(2n+1)$
$c_n=[2^{n+1}-\{2(n+1)+1\}]-\{2^n-(2n+1)\}$
$=2^n-2$
$>0\ (n\geqq 4)$

よって　$b_n>b_{n-1}>\cdots\cdots>b_4>0$

したがって　$a_n>a_{n-1}>\cdots\cdots>a_4=0$

(2)　$a_n=3^n-n^3$ とし，$b_n=a_{n+1}-a_n$，$c_n=b_{n+1}-b_n$，$d_n=c_{n+1}-c_n$ とする。$(n\geqq 3)$

$b_n=\{3^{n+1}-(n+1)^3\}-(3^n-n^3)$
$=2\cdot 3^n-(3n^2+3n+1)$
$c_n=[2\cdot 3^{n+1}-\{3(n+1)^2+3(n+1)+1\}]$
$-\{2\cdot 3^n-(3n^2+3n+1)\}$
$=4\cdot 3^n-6(n+1)$
$d_n=[4\cdot 3^{n+1}-6\{(n+1)+1\}]-\{4\cdot 3^n-6(n+1)\}$
$=8\cdot 3^n-6>0\ (n\geqq 3)$

よって　$c_n>c_{n-1}>\cdots\cdots>c_3$
$b_n>b_{n-1}>\cdots\cdots>b_3$

したがって　$a_n>a_{n-1}>\cdots\cdots>a_3=0$

【解答③】　＜二項定理(多項定理)＞

(1)　$n=4$ のとき，この不等式は成り立つ。

$n\geqq 5$ のとき

$2^n=(1+1)^n$
$={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1}+{}_nC_n$
$\geqq 1+n+\frac{1}{2}n(n-1)+\frac{1}{2}n(n-1)+n+1$
$=n^2+n+2$
$\geqq n^2\ (n\geqq 5)$

(2)　$n\geqq 3$ のとき

$3^n=(1+2)^n$
$={}_nC_0+{}_nC_1\cdot 2+{}_nC_2\cdot 2^2+\cdots\cdots$
$+{}_nC_{n-1}\cdot 2^{n-1}+{}_nC_n\cdot 2^n$
$\geqq 1+2n+2n(n-1)+\frac{4}{3}n(n-1)(n-2)$
$=\frac{4}{3}n^3-2n^2+\frac{8}{3}n+1$
$=n^3+\frac{1}{3}(n^3-6n^2+8n+3)$
$=n^3+\frac{1}{3}(n-3)(n^2-3n-1)$
$\geqq n^3\ (n\geqq 3)$

または

$n=3$，4 のとき，この不等式は成り立つ。

$n\geqq 5$ のとき

$3^n=(1+1+1)^n$
$\geqq 3\cdot\frac{n!}{1!1!(n-2)!}+3\cdot\frac{n!}{1!2!(n-3)!}$
$=3n(n-1)+\frac{3}{2}n(n-1)(n-2)$
$=n^3+\frac{1}{2}n^2(n-3)$
$\geqq n^3\ (n\geqq 5)$

【解答④】　＜背理法＞

(1)　$2^n<n^2$ を満たすような $n\ (n\geqq 5)$ が存在すると仮定すると

$$2^{n-1}<\frac{n^2}{2}=\frac{n^2}{2(n-1)^2}\cdot(n-1)^2\leqq(n-1)^2$$

より，$n-1$ の場合も成立する。これを繰り返すことで，$2^4<4^2$ となるため矛盾する。

(2)　$3^n<n^3$ を満たすような $n\ (n\geqq 4)$ が存在すると仮定すると

$$3^{n-1}<\frac{n^3}{3}=\frac{n^3}{3(n-1)^3}\cdot(n-1)^3\leqq(n-1)^3$$

より，$n-1$ の場合も成立する。これを繰り返すことで，$3^3<3^3$ となるため矛盾する。

【解答⑤】　＜微分①＞

(1)　$f(x)=2^x-x^2$ とおくと

$f'(x)=2^x\log 2-2x$，$f''(x)=2^x(\log 2)^2-2$

ここで

$f''(x)\geqq f''(4)=16(\log 2)^2-2>0\ (x\geqq 4)$
$f'(x)\geqq f'(4)=16\log 2-8>0\ (x\geqq 4)$

$f(4)=0$ であるから　$f(x)\geqq 0\ (x\geqq 4)$

したがって　$2^x\geqq x^2\ (x\geqq 4)$

(2)　$f(x)=3^x-x^3$ とおくと

$f'(x)=3^x\log 3-3x^2$，
$f''(x)=3^x(\log 3)^2-6x$，
$f'''(x)=3^x(\log 3)^3-6$

ここで

$f'''(x)\geqq f'''(3)=27(\log 3)^3-6>0\ (x\geqq 3)$
$f''(x)\geqq f''(3)=27(\log 3)^2-18>0\ (x\geqq 3)$

$$f'(x) \geqq f'(3) = 27\log 3 - 27 > 0 \ (x \geqq 3)$$

$f(3)=0$ であるから　$f(x) \geqq 0 \ (x \geqq 3)$

したがって　　$3^x \geqq x^3 \ (x \geqq 3)$

【解答⑥】　＜微分②＞

(1)　$f(x)=\dfrac{2^x}{x^2}$ とおくと

$$f'(x)=\frac{2^x(x\log 2-2)}{x^3}>0 \ (x \geqq 4)$$

$f(4)=1$ より　　$f(x) \geqq 1 \ (x \geqq 4)$

よって　　$2^x \geqq x^2 \ (x \geqq 4)$

(2)　$f(x)=\dfrac{3^x}{x^3}$ とおくと

$$f'(x)=\frac{3^x(x\log 3-3)}{x^4}>0 \ (x \geqq 3)$$

$f(3)=1$ より　　$f(x) \geqq 1 \ (x \geqq 3)$

よって　　$3^x \geqq x^3 \ (x \geqq 3)$

【解答⑦】　＜微分③＞

(1)　$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とおくと

$$f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}<0 \ (x \geqq 4)$$

$f(4)=\dfrac{\log 4}{4}=\dfrac{\log 2}{2}=f(2)$ であるから

$$\frac{\log x}{x} \leqq \frac{\log 2}{2} \ (x \geqq 4)$$

$$2\log x \leqq x\log 2 \ (x \geqq 4)$$

よって　　$2^x \geqq x^2 \ (x \geqq 4)$

(2)　$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とおくと

$$f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}<0 \ (x \geqq 3)$$

よって　　$\dfrac{\log x}{x} \leqq \dfrac{\log 3}{3} \ (x \geqq 3)$

$$3\log x \leqq x\log 3 \ (x \geqq 3)$$

したがって　　$3^x \geqq x^3 \ (x \geqq 3)$

【解答⑧】　＜微分④＞

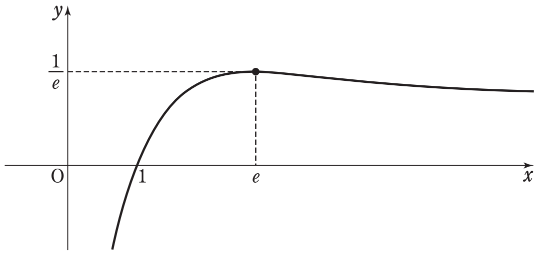
(1)　$f(x)=\dfrac{\log x}{x} \ (x \geqq 1)$ を考えると

$$f'(x)=0 \iff x=e$$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	1	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$

ゆえに，$y=f(x)$ のグラフは次のようになる。



$f(x)=a \ (a \geqq 0)$ を満たす x は高々 2 個であり，$f(2)=f(4)$ かつ $x \geqq 4$ で $f(x)$ は単調減少することから，$n \geqq 4$ に対して

$$\frac{\log n}{n} \leqq \frac{\log 2}{2}$$

したがって　　$2^n \geqq n^2 \ (n \geqq 4)$

(2)　(1)と同様に考えると，$f(x)$ は $x \geqq 3$ で単調減少するから，$n \geqq 3$ に対して

$$\frac{\log n}{n} \leqq \frac{\log 3}{3}$$

よって　　$3^n \geqq n^3 \ (n \geqq 3)$

8 つの解法以外にも，幾何的な解釈による解法なども考えられる。

§4. 設定の吟味と解法に対する考察

(1)は，数学的帰納法の学習においてしばしば扱われる問題であるため，『**数学的帰納法で解く問題である**』という印象が強い高校生が多いのではないかと推察される。実際に，本問題を制限時間 15 分で，数学Ⅲまでの学習を終えている 14 人の高校生に解いてもらったところ，14 人中 11 人は数学的帰納法による証明を試みていた。そして，(2)の因数分解が上手くいかずに途中で終わっている生徒が 10 人もいた。

示した解法は，例として，次のようなグループに分けることができる。

数列
①，②

式と証明
③，④

微分
⑤，⑥，⑦，⑧

一般化◎
④，⑥，⑦，⑧

差
①，②，⑤

$\dfrac{\log x}{x}$
⑦，⑧

解答を比較すると，④，⑥，⑦，⑧は，(1)と(2)の計算量・記述量に差が見られず，かつその量はどちらも少なめで簡潔な解答になっている。⑧に至っては，(2)の方が圧倒的に少なく簡潔になっている。

問題設定を吟味すると，(2)は(1)の右辺の次数と左辺の底がそれぞれ増加した不等式である。すなわち，どちらも a^n と n^a についての不等式である。次数と底が大きくなることによる影響が大きい因数分解や差・二項定理(多項定理)等は，(2)の計算が(1)よりも煩雑になる。逆に，a^n と n^a について議論している『一般化◎』グループに属するものは，(2)も(1)と同程度の議論でよい，あるいは(1)を利用することにより議論を削減することができる。設定を吟味することで，より効果的な解法を選択できる例ではないだろうか。

§5. おわりに

しばしば議論の対象となる『**暗記数学の是非**』だが，その答えは本稿の内容に含まれているように思う。暗記数学と非難されるものの１つは，本稿の内容を用いれば『**自然数に関する命題は数学的帰納法を使う**』といったような主張ではないだろうか。ある問題に対して，自身の経験を踏まえて複数の解法が想起され，その中からより効果的な解法を選択することは，暗記数学ではなく，言うなれば『**経験数学**』といったところだろうか。この手の議論の際には，この２つのものが同一視された状態で進んでいることがあるように感じる(あくまで筆者の経験に基づく感想であり，この正当性を主張するつもりはないという点に留意していただきたい。)。

さて，冒頭で述べた『やまぐち数学・進路指導研究会』は，数学・数学教育に対して情熱を持っている若手教員，幾多の経験に裏打ちされた確かな実力を遺憾なく発揮されている中堅・ベテラン教員，指導主事の方々等が参加している研究会であり，数学や進路指導に関して白熱した議論を交わすことができる場となっている。この記事をご覧になって少しでも興味を持っていただけた方がいらっしゃれば，是非参加していただきたい。県を跨いでの参加も大歓迎である。

(山口県立下関南高等学校)