大学での微積分（下）

宮川（みやがわ）　幸隆（ゆきたか）

§8. 巾（べき）級数

関数論において最も重要な関数項級数は

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \left(\begin{array}{l}\text{各 } c_n,\ z_0 \text{ は複素定数；} \\ z \text{ は複素変数}\end{array}\right) \qquad (8)$$

の型の級数で，これを**巾級数**と呼ぶ．

巾級数 (8) は全複素平面で定義された複素関数項級数である．今，(8) の収束する範囲を求めることにしよう：

まず，そのための準備をする．

前回の［定義 1］において，実数を要素とする集合の有界性という性質を定義したが，μ が実数を要素とする集合 R$(\neq \phi)$ の上界ならば，μ より大きい任意の実数もまたRの上界である．ゆえに，もしもそれが存在するものならば，我々は最小の上界に興味がある．実は

上に有界な（実数を要素とする）どんな集合 R（$\neq \phi$）に対しても，Rの最小上界が存在する．

という命題は**実数の連続性**という性質と同値な内容をもっている．“実数の連続性”は大学において微分積分学を展開する際には公理として要請される性質であるから，本稿では，上の“最小上界の存在”を公理として認めることにする．Rの最小上界はRの**上限**とも呼ばれる．**下限**も同様に定義される．

さて，実数列 $\{a_n\}$ の項全体の集合が上［下］に有界であるとき，**数列 $\{a_n\}$ 自体が上［下］に有界**であるといい，また，実数列 $\{a_n\}$ が上［下］に有界であるとき，$\{a_n\}$ の項全体の集合の上［下］限を，**数列 $\{a_n\}$ 自体の上［下］限**と呼ぶことにすれば，上の公理から直ちに次の定理が成り立つ：

定理 12.

上［下］に有界な単調非減少［非増加］数列はその上［下］限に収束する．

ただし，ここに

［定義 9］ 実数列 $\{a_n\}$ が**単調非減少［非増加］**

$\iff$ 任意の自然数 n に対して

$a_n \leqq a_{n+1}$ ［$a_n \geqq a_{n+1}$］ ▩

である．実は，定理 12. は定理 8. の証明にも使われる．

次に，非負項実数列 $\{a_n\}$ に対して

(i) $\{a_n\}$ が上に有界なときは，任意の自然数 k に対して，集合 $\{a_k,\ a_{k+1},\ a_{k+2},\ \cdots\cdots\}$ は上に有界であるから，その上限を L_k とおくと，

明らかに，$L_1 \geqq L_2 \geqq L_3 \geqq \cdots\cdots \geqq 0$

が成り立ち，定理 12. によれば，$\lim_{n\to\infty} L_n$ が存在するので，この極限値を記号

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \qquad (9)$$

で表し，$\{a_n\}$ の**上極限**と呼ぶ．

(ii) $\{a_n\}$ が上に有界でないときは

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = +\infty$$

と定める．

この定義によれば，どんな非負項実数列 $\{a_n\}$ に対しても (9) は存在し，しかもただ 1 つである．

以上を準備して，巾級数 (8) の収束する範囲に関して次の定理が成り立つ：

定理 13. 巾級数 (8) に対し

$$0 < \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} < +\infty$$

であるとき，$R = \dfrac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}$ とおけば

(i) $|z-z_0| < R$ を満たす各 z に対して，複素級数 (8) は絶対収束をする．

(ii) $|z-z_0| > R$ を満たす各 z に対して，複素級数 (8) は発散する．

(iii) $0 \leqq \rho < R$ とすると，巾級数 (8) は点集合 $|z-z_0| \leqq \rho$ で一様収束する． ▩

［注意］ Rのことを巾級数(8)の収束半径と呼ぶ．

$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}=0$ のときは複素級数(8)は全複素平面で絶対収束をし，収束半径は $+\infty$ であるという．

$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}=+\infty$ のときは複素級数(8)は z_0 以外のいかなる点zでも発散し収束半径は0であるという．

定理 14．（巾級数の項別微分可能性）

収束半径Rが0ではないような巾級数(8)の点集合 $|z-z_0|<R$ における和 $\sum c_n(z-z_0)^n$ は，$|z-z_0|<R$ の各点zにおいて微分可能であり

$$\left(\sum c_n(z-z_0)^n\right)'=\sum nc_n(z-z_0)^{n-1}$$

が成り立つ．更に右辺の巾級数の収束半径もRである．▨

§9．オイラーの公式

本節では，自然対数の底eを底とする**複素変数の指数関数** e^z を定義し，それと実変数の三角関数（殊に，cos，sin）との関連を考察する．

そのために，自然対数の底eの厳密な定義から始めることにしよう：

aを1以外の正の数とするとき，aを底とする実1変数の指数関数

$$a^x \tag{10}$$

の厳密な定義は高校数学では行えなかった．それにもかかわらず，(10)を既知のものとみなして

$$\frac{d}{dx}a^x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$

などと計算したが，このような計算は

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} \tag{11}$$

の値が確定してこそ（もちろん有限の値として），初めて可能である．高校数学では(11)が有限確定値であることを，それが関数$y=a^x$のグラフの，点(0, 1)における接線の傾きを表すからという理由によって認めて，極限値(11)がちょうど1に等しいようなaの値を e と定義したが，そもそも関数 $y=a^x$ のグラフの，点(0, 1)における接線が確定するかどうかから議論しなければ厳密な議論とはいえないし，上の $\frac{d}{dx}a^x$ の計算では，実数指数の指数法則

$$a^{x+\Delta x}=a^x\cdot a^{\Delta x} \tag{12}$$

が証明なしで使われている．

(10)の厳密な定義も，(12)の厳密な証明も，本連載で今までに準備して来た予備知識によって実行可能なのであるが，それは頗（すこぶ）る面倒で，面白味のない作業である．そこで本稿では，複素変数の指数関数 e^z を厳密に定義し，それが我々の（指数関数に関する）曖昧（あいまい）な知識と矛盾しないことを2，3の例で確かめて，差し当たって満足しよう．

そのために，eの厳密な定義から始めるわけであったが，$\lim_{\Delta x\to +0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=1$ が成り立つようにしたいのであるから，

$\Delta x\fallingdotseq 0$ のとき，$e^{\Delta x}\fallingdotseq 1+\Delta x$

すなわち　$e\fallingdotseq(1+\Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}$

つまり

$$e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \tag{13}$$

が必要である．しかし，(13)の右辺の極限値の存在証明においても面倒な論点があるので，我々は，

数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ の極限値をもってeなる数の定義とする．すなわち

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{14}$$

問題1　(14)の右辺の極限値が存在することを証明せよ（hint．二項定理と前節の定理12を用いよ）．

さて，複素変数 $z=x+iy$ のeを底とする指数関数 $e^z=e^{x+iy}$ の定義に移ろう：

複素数指数の指数法則

$$e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2} \tag{15}$$

が成り立つものと仮定して

$$e^z=e^x\cdot e^{iy}$$

と定義し，e^x の方は既知とすると，e^{iy} とは何か？と考えていくことになるが，更に

$$\frac{d}{dz}e^z=e^z \tag{16}$$

が成り立つものと仮定すると

$$\frac{d}{dy}e^{iy}=ie^{iy}$$

［複素定数が混入しても，合成関数の微分法が成立］により，e^{iy} は微分方程式

$$\frac{dw}{dy}=iw \tag{17}$$

の解と考えられる．今

$$w=\cos y+i\sin y$$

も(17)を満たすから

$$e^{i0}=e^0=1,\ \cos 0+i\sin 0=1$$

により

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y \tag{18}$$

と考えるべきであるが，微分方程式(17)の解は初期条件を与えればただ1つである，ということが証明されるにもかかわらず，この定義は採用したくない．その理由は，(18)は e^x を説明できないという点にある（今はまだ e^x を既知とはみなせない）．

そこで，e^x も e^{iy} もどちらも包含してしまう

$$e^z$$

そのものを定義してしまうために，前回に導入した巾級数に登場してもらおう：

複素関数項級数（前回§6.参照）としての巾級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \tag{19}$$

を考察する．**任意の複素数 z に対して，複素級数(19)が絶対収束をすることが**，前回に紹介した定理8を用いて**示される**から，巾級数(19)の収束半径は $+\infty$ である．

そこで，任意の複素数 z に対して

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \tag{20}$$

と定義することにしよう．今もし，例えば

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} \tag{21}$$

が成立しなければ，定義(20)はその妥当性を欠くことになるが，(21)は次の定理の系としてその成立が保証される：

定理 15. 任意の複素数 z に対して，

数列 $\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right\}$ の極限値は(19)に等しい．

すなわち　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$　■

前回に紹介した定理11.によれば，定義(20)は，複素数指数の指数法則(15)を満たす．更に前節の定理14.（巾級数の項別微分可能性）によれば，(20)は，(16)を満たす．

次に，(20)が(18)を満たすことを確かめよう：

そのためには，(20)により

$$e^{iy}=1+\frac{iy}{1!}-\frac{y^2}{2!}-\frac{iy^3}{3!}+\cdots\cdots$$

であって，右辺の複素級数は絶対収束をするから，前回に紹介した定理10.により

$$e^{iy}=\left(1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\cdots\cdots\right)$$
$$+\left(\frac{iy}{1!}-\frac{iy^3}{3!}+\frac{iy^5}{5!}-\cdots\cdots\right)$$

であるので，2つの実数項級数

$$1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\cdots\cdots \tag{22}$$

$$y-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-\cdots\cdots \tag{23}$$

がそれぞれ $\cos y$，$\sin y$ に等しいことを示せばよいが，ある区間で無限回微分可能な**実数値**関数の，Taylor 展開可能性についての

定理 16.（Taylor 展開可能性）

実1変数**実数値**関数 $f(x)$ が無限回微分可能な区間 I 内の定点 a を固定したとき，

I 内の任意の点 x と任意の自然数 n とに対して，x と n とに依存する実数 $\theta_{x,n}$（ただし，$0<\theta_{x,n}<1$）が存在して

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$
$$+\cdots\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\xi_{x,n})}{n!}(x-a)^n$$

［ただし，$\xi_{x,n}=a+\theta_{x,n}(x-a)$］

が成り立つ．

更に，I 内のすべての点 x に関して

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n)}(\xi_{x,n})}{n!}(x-a)^n=0$$

であるならば，I 内のすべての点 x に関して

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\cdots\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots\cdots$$

が成り立つ．　■

によれば，(22)，(23)はそれぞれ $\cos y$，$\sin y$ に等しいことがわかる．よって，(18)が成り立つ．

等式(18)は**オイラーの公式**と呼ばれる．

§10. 複素変数の対数関数

前節のオイラーの公式によれば，n を整数とするとき，　$e^{2n\pi i}=1$

が成り立つから，指数法則により

$$e^{z+2n\pi i}=e^z$$

となり，e^z は周期関数で，$2n\pi i$ はその周期であることがわかる．逆に w を e^z の周期とすれば

$$w=2n\pi i\ (n\text{ は整数})$$

すなわち，e^z の周期は $2\pi i$ の整数倍に限られる

ことが，ちょっとした議論の後に示される．

問題2． 区間（$-\infty, \infty$）で常に $e^x>0$ であることを示せ（hint. 前節の定理15. と公式(15)を用いる）．

問題3． $\lim_{x\to\infty} e^x=\infty$，$\lim_{x\to-\infty} e^x=0$ を示せ
（hint. 前節の定理15. を用いる）．

複素変数の指数関数 e^z の逆関数として，**log の定義が複素数にまで拡張される：**

すなわち　　$\log z=u+iv$
$\iff z=e^{u+iv}=e^u(\cos v+i\sin v)$

により

$$\mathbf{\log z=\log|z|+i\arg z} \tag{24}$$

と定義する．

(24)によれば，**$\log z$ の定義域は $z\neq 0$** であり，$z\neq 0$ を満たす任意の z に対して，**$\log z$** の実数部分は確定するが，**虚数部分は一意には定まらなくて 2π の整数倍だけ異なる無数の値を有する．**

今，$\boldsymbol{-\pi<\arg z\leqq\pi}$ と限定すれば，虚数部分も確定するが，そのときの $\log z$ の値を**主値**と呼び，**Log *z*** で表すことにする．特に z が正の実数ならば，$\mathrm{Log}\,z$ は高校数学で学んだ $\log z$ に一致する．

例　$\mathrm{Log}(-1)=\pi i$，$\mathrm{Log}\,i=\dfrac{\pi}{2}i$

一般に $\arg z$ を $\alpha<\arg z\leqq\alpha+2\pi$ のような区間に限れば $\log z$ は確定する．それを $\log z$ の**1つの一価な枝**という．

変数 z が動き回る平面としての複素平面を **z 平面**と呼ぶ．原点を端点とする半直線 $\arg z=\alpha$ と原点とを z 平面から除いた残りの開集合Eにおいては

$\log z=\log|z|+i\arg z$，$\alpha<\arg z<\alpha+2\pi$

とおくことにより，Eの各点で微分可能な1つの一価な枝 $\log z$ が定義され

$$(\log z)'=\frac{1}{z}$$

が成り立つ．なぜならば

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\log z-\log z_0}{z-z_0}=\lim_{w\to w_0}\frac{w-w_0}{e^w-e^{w_0}}=\frac{1}{e^{w_0}}=\frac{1}{z_0}$$

となるからである．

§11. Cauchy の積分公式

本節では関数論の初歩において最も基本的でかつ重要な Cauchy の積分公式というものについて論じる．Cauchy の積分公式は Cauchy の積分定理という定理を用いて導かれるが，Cauchy の積分定理の取り扱いについては，Jordan の曲線定理という定理に関連した問題点がある．全く一般の場合のCauchy の積分定理は，次のように述べられる：

複素関数 $f(z)$ が Jordan 閉曲線 C ［前回§5. 参照］**で囲まれた領域と，その境界 C を含むある領域において正則ならば**

$$\boldsymbol{\int_C f(z)\,dz=0}$$

が成り立つ（以下本節では，**曲線といえば区分的に滑らかなものを指す**）．

しかし，こういうためには，“Jordan 閉曲線が領域を囲む”という **Jordan の曲線定理**をあらかじめ証明しておかねば定理が不透明となる．ただし，ここに，“領域”と“正則”という言葉の意味は以下のように定義される：

［**定義10**］ 複素平面上の点集合Eが，“その中の任意の2点がEの中だけを通る曲線で結べる”という性質をもつとき，Eは**弧状連結**であるといわれる．そして，弧状連結な開集合を**領域**と呼ぶ．　▩

複素平面上の開集合Eに対して，Eの各点において微分可能な複素関数のことを，Eにおいて**正則**な複素関数と呼ぶ．この言葉は，次のように使われるので存在価値を有する：すなわち
“複素関数がある**点において正則**であるとは，その点のある ε-開近傍（前回［定義2］参照）において正則であることを意味する．”

Jordan の曲線定理は極めて当り前のことのように思われるが，その厳密な証明は決して容易ではない．本稿では，Jordan の曲線定理を証明なしで使って議論を進めるという後味の悪さを避けるために，Cauchy の積分定理を全く一般の場合にまで定式化することは断念して，積分公式を導ける程度に制限した形だけを定式化すると，次のようになる：

定理17.（円板に関する Cauchy の積分定理）

複素関数 $f(z)$ が開円板 $\mathrm{U}(z_0, \rho)$：$|z-z_0|<\rho$ で正則ならば，$\mathrm{U}(z_0, \rho)$ 内の任意の閉曲線 C に対し

$\displaystyle\int_C f(z)\,dz=0$　　が成り立つ．　▩

系3． 複素平面上の開円板Uから有限個の点 ζ_j を除いた残りを U' とし，複素関数 $f(z)$ は領域 U' で正則であるとする．すべての j に対し

$$\lim_{z\to\zeta_j}(z-\zeta_j)f(z)=0$$

が成り立てば，U′ 内の任意の閉曲線 C に対して

$$\int_C f(z)\,dz=0$$

が成り立つ． ▩

上の定理 17. は次の定理によって，その成立が保証される：

定理 18. 領域 D で連続な複素関数 $f(z)$ が D における**原始関数** $F(z)$ をもてば，D 内に含まれ，始点が α，終点が β である曲線 C に対して

$$\int_C f(z)\,dz=F(\beta)-F(\alpha)$$

が成り立つ．したがって α から β への積分は，両端だけで定まって曲線のとり方には関係しない．特に C が閉曲線のときには，それに沿う $f(z)$ の積分は 0 となる． ▩

ただし，ここに

[**定義 11**] 領域 D で複素関数 $f(z)$ が連続であるとする．D で正則な複素関数 $F(z)$ が

$$F'(z)=f(z)\quad(z\in \mathrm{D})$$

を満たすとき，$F(z)$ のことを $f(z)$ の D における**原始関数**と呼ぶ． ▩

と定義する．

[**注意**] $\log z$ については，その一価な枝がとれる領域においてでなければ，$1/z$ の原始関数とは呼ばない．

定理 19. 円周：$|z-z_0|=r$ を正の向きにまわる閉曲線 $z=z_0+re^{i\theta}$ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ を C とすれば，C の内部の点 a に対して，複素積分

$$n(C,\ a)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{dz}{z-a}$$

の値は 1，外部の点に対しては 0 である． ▩

なぜなら次の図のように，点 a が円周 C の内部にあるときは，a を端点とする 3 本の半直線

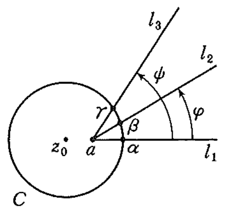
l_1：$z=a+te^{i0}$,

l_2：$z=a+te^{i\varphi}$,

l_3：$z=a+te^{i\psi}$

$(0<\varphi<\psi<2\pi,\ t\geqq 0)$

を，C との交点がそれぞれ $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ となるように引いて，複素平面から l_1, l_2, l_3 を除いた残りの領域をそれぞれ D_1, D_2, D_3 とすると，D_1, D_2, D_3 においては $1/(z-a)$ の原始関数として，それぞれ



$\log_{(1)}(z-a)$，$0<\arg(z-a)<2\pi$,

$\log_{(2)}(z-a)$，$\varphi<\arg(z-a)<\varphi+2\pi$,

$\log_{(3)}(z-a)$，$\psi<\arg(z-a)<\psi+2\pi$

をとることができて，定理 18. により

$$\begin{aligned}\int_C\frac{dz}{z-a}&=\log_{(3)}(\beta-a)-\log_{(3)}(z_0+re^{i\cdot 0}-a)\\&\quad+\log_{(1)}(\gamma-a)-\log_{(1)}(\beta-a)\\&\quad+\log_{(2)}(z_0+re^{i\cdot 2\pi}-a)-\log_{(2)}(\gamma-a)\\&=2\pi i\end{aligned}$$

となるからである．外部の点に対しては容易である．

定理 19. の複素積分の値 $n(C,\ a)$ を点 a の周りの円周 C の**回転数**と呼ぶ．以上を準備して

定理 20.（Cauchy の積分公式）

複素関数 $f(z)$ が開円板 $\mathrm{U}(z_0,\ \rho)$ から有限個の点 ζ_1, ……, ζ_m を除いた残りの領域 D で正則であるとし，各 j に対して $\displaystyle\lim_{z\to\zeta_j}(z-\zeta_j)f(z)=0$

が成り立っているならば，D 内の円周 C（中心 z_0）に対し

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{z-a}\,dz=\begin{cases}f(a) & (a：C\text{内の D の点})\\ 0 & (a：C\text{外の D の点})\end{cases}$$

が成り立つ． ▩

§12. Cauchy の積分公式がもたらすもの

前節の最後に Cauchy の積分公式を定式化したがこの定理は関数論において非常に基本的で，いろいろの重要な結果をもたらす．

今回 §8. において巾級数の項別微分可能性（定理 14.）を述べたが，あの定理から次の定理が従う：

定理 21.（巾級数の C^∞-級性と係数の逐次導関数値表示）

巾級数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ の収束半径を R $(\neq 0)$ とする．各自然数 p に対して，巾級数

$$\sum_{n=p}^{\infty}n(n-1)\cdots\cdots(n-p+1)c_n(z-a)^{n-p}$$

の収束半径も R であって，$f(z)$ は開円板 $\mathrm{U}(a,\ R)$：$|z-a|<R$ において p 次の導関数をもち，$\mathrm{U}(a,\ R)$ において

$$f^{(p)}(z)=\sum_{n=p}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-p+1)c_n(z-a)^{n-p}$$

が成り立つ．特に収束円の中心においては

$$f^{(p)}(a)=p!\,c_p \text{ すなわち } c_p=\frac{f^{(p)}(a)}{p!}$$

が成り立つ. ▩

これより, 実関数の世界では思いもよらない, 複素関数に特有の次の素晴らしい定理が成り立つ：

定理 22.（正則関数の Taylor 展開）

複素関数 $f(z)$ が領域Dにおいて正則であるとする. このとき, Dの各点 a に対して, a を中心としてD内に含まれる最大開円板を $\mathrm{U}(a,\ R(a))$ とすれば, $f(z)$ は $\mathrm{U}(a,\ R(a))$ において巾級数

(**Taylor 級数** と呼ばれる) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$

に展開される. この必然の結果として, $f(z)$ はDにおいて無限回微分可能で

$c_n=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ が成り立つ. ▩

この定理から導かれる重要な結果は, 次の一致の定理である：

定理 23.（一致の定理）

領域Dにおいて正則な２つの複素関数 $f(z)$, $g(z)$ が, Dの内部に少なくとも１つの集積点をもつようなD内の点集合Eの上で共通の値をとるならば, Dの全体において両者は完全に一致する. ▩

ただし, ここに

[定義 12] 複素平面上の点集合Eと複素平面上の点 z_0 とに対して

z_0 がEの**集積点**である.

$\Longleftrightarrow$ どんなに小さな正数 ε に対しても,

$\mathrm{U}(z_0,\ \varepsilon)\cap\mathrm{E}$ が無限集合である.

(ただし, $\mathrm{U}(z_0,\ \varepsilon)：|z-z_0|<\varepsilon$ である.) ▩

と定義する.

複素関数 $f(z)$ を $|z-a|<R$ で正則であるとし, $0<r<R$ とすれば, Cauchy の積分公式により

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r}\frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

であるから, $z=a+re^{i\theta}$ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ により

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(a+re^{i\theta})}{re^{i\theta}}\frac{dz}{d\theta}\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a+re^{i\theta})\,d\theta \tag{25}$$

この (25) から

$$|f(a)|\leqq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(a+re^{i\theta})|\,d\theta\ \ (0<r<R) \tag{26}$$

なる不等式が得られ, この (26) と一致の定理により次の定理が成り立つ：

定理 24.（最大絶対値の原理）

$f(z)$ を領域Dにおいて正則かつDにおいて定数でないものとすれば, $|f(z)|$ はDにおいて最大値をとらない. この場合, 特にDが有界であって, Dにその境界を付加して得られる閉領域で $f(z)$ を連続と仮定すれば, $|f(z)|$ は必ずDの境界において最大値をとる. ▩

そして, これから更に, 次の定理が成り立つ.

定理 25.（Schwarz の定理）

$f(z)$ を $|z|<R$ において正則, かつ $|z|<R$ の各点で $|f(z)|\leqq M$ とする. このとき, もし, $f(0)=0$ ならば, $|z|<R$ において

$$|f(z)|\leqq\frac{M}{R}|z|$$

が成立し, かつ $0<|z|<R$ の１点 z_0 において等号が成立する場合は, $f(z)\equiv\dfrac{M}{R}e^{i\theta}z$ (θ はある実定数) のときに限る. ▩

(完)

※ 編集部注：この文章は, 宮川先生が高校生に大学で学ぶ数学を紹介する形で書かれたものです.

〈参 考 文 献〉

[1] 高木貞治 著　解析概論　岩波書店
[2] 小平邦彦 著　解析入門　岩波書店
[3] 能代　清 著　函数論概説 I, II　岩波書店
[4] 能代　清 著　初等函数論　培風館
[5] 一松　信 著　函数論入門　培風館
[6] L. V. Ahlfors 著
Complex Analysis　McGraw Hill 書店
[7] 田村二郎 著　解析関数　裳華房

(静岡県立伊東高等学校)