「自由ベクトルと位置ベクトル，時間と時刻との関係」を２つの問題から探る

石橋（いしばし）　信夫（のぶお）

§0. 新課程でのベクトルの取り扱いについて

「ベクトル」は生徒にとって，つかみどころがなく抽象的，教師にとっても概念を理解させる事，単純な所と複雑な所が入り混じっていて教えにくい分野である。私も通りいっぺんの指導しかできず悩んでいた。ただ，入試での図形の問題は結局内積と１次独立だと気が付けば，他の分野よりも覚えることは少ない。

新課程では数学Ｃに移り，理系は今まで通りとして，文系においても共通テスト，２次試験でもその重要性は変わらない様だ。むしろ共通テストの科目数を考えると，教える時間数が減る事が予想される。ポイントを押さえ，スムーズに教えていく必要が生じる。

教科書の流れは，平面ベクトルに限定すると，有向線分 → ベクトル → 基本ベクトル表示 → 内積 → 位置ベクトル → 図形・方程式への応用である。ここで，基本ベクトル表示は大学での基底を入れて抽象ベクトル空間から数ベクトル空間を構成していく事を意識していると思われる。この事は次の参考文献にある⑥にイメージ図として示されている。漸化式や微分方程式も線形性から統一して解けることを参考文献⑤から学び，一般化の威力を実感した覚えがある。

§1. 参考文献とベクトルの記述方法について

主な参考文献を先に挙げると①「大学への新数学　数ⅡＢ中田，藤田，根岸　著（研文書院　1970 年版）」②「ベクトル解析　戸田盛和　著（岩波書店　1989 年版）」③「入試数学伝説の良問 100 安田亨　著（講談社ブルーバックス　2003 年版）」④「旧課程黄チャート式数学Ⅱ＋Ｂ（数研出版　2017 年版）」⑤「線型代数入門　齋藤正彦　著（東京大学出版会 1973 年版）」⑥「明解演習線形代数　小寺平治　著（共立出版　1982 年版）」である。参考文献は数字で示していく。②を参考にしたのは，大学での線形代数は数ベクトルが主体であり，矢線ベクトルが詳しく書かれているのは物理系の「ベクトル解析」だからである。

これから，教科書にある「位置を問題にせず向きと大きさだけで決まる量」（一般的な「ベクトル」）を「**自由ベクトル**」と記述する。それは「**位置ベクトル**」と対比させたいからである。ちなみに「位置ベクトル」は「束縛ベクトル」とも言われている。「自由ベクトル」「束縛ベクトル」についての記述は②にある。

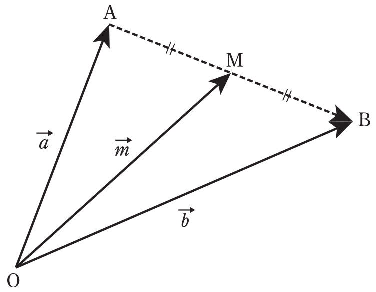
§2. 自由ベクトル，位置ベクトルの混在と２つの問題を提起する

自由ベクトルに慣れてきたところで，少し違った位置ベクトルが登場し生徒は戸惑う。そして，これが図形や方程式の主役である。教科書の記述には２つのベクトルが混じって出てくるので，それを的確に示し，その性質も示すことが教師の役割である。

【問題１】(なぜこの様に間違うか)

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$ より，

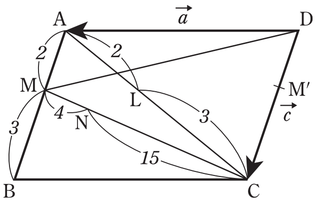
$\overrightarrow{AB}$ の中点の位置ベクトル $\vec{m}$ は　$\boldsymbol{\vec{m}=\dfrac{\vec{b}-\vec{a}}{2}}$



問題１の背景　この間違いは③に載っている。

【問題２】(解答の説明に位置ベクトルと自由ベクトルが混在して出てくる)

平行四辺形 ABCD において，対角線 AC を 2：3 に内分する点を L，辺 AB を 2：3 に内分する点を M，線分 MC を 4：15 に内分する点を N とするとき，3 点 D，L，N は一直線上にあることを証明せよ。



【解答の一部】

$\overrightarrow{DA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{DC}=\vec{c}$ とすると　$\overrightarrow{DL}=\dfrac{3\vec{a}+2\vec{c}}{2+3}$

$\boldsymbol{\overrightarrow{DM}}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AM}=\boldsymbol{\vec{a}+\dfrac{2}{5}\vec{c}}$ であるから……

問題２の背景　これは④に載っている共線条件の問題である。ここで **$\overrightarrow{DC}=\vec{c}$ は位置ベクトルなのだから，$\overrightarrow{AM}=\dfrac{2}{5}\vec{c}$ としてよいのだろうか**。位置ベクトルの始点は固定してあると教科書に書いてある。

§3.「自由ベクトルと位置ベクトルの関係は時間と時刻の関係に似ている」を用いて問題解決

ここで，私の例えとして，自由ベクトル≈時間，位置ベクトル≈時刻 とする。今時刻の原点を正午としてこれに関する時間，時刻の例も述べる。

(i)　**「位置ベクトル＋自由ベクトル＝位置ベクトル」**

ここで「位置ベクトル」の終点と「自由ベクトル」の始点は一致させる。これは「**時刻＋時間＝時刻**」と似ている。

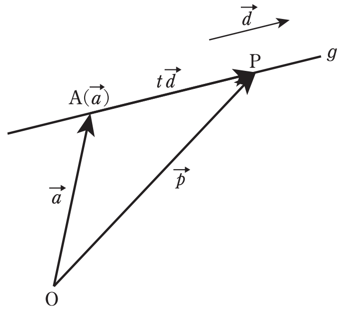
例　3 時＋2 時間＝ 5 時

例　直線の方程式

点 $A(\vec{a})$ を通り，

$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{d}$ に平行な直線 g の方程式は，t を実数として $\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$ と表せる。

ここで，$\vec{p}$，$\vec{a}$ は位置ベクトルで $\vec{d}$ は自由ベクトルである。



(ii)　**「位置ベクトル－位置ベクトル＝自由ベクトル」**

この事は①で強調されている。②でも「位置ベクトル」の差は「変位ベクトル」で「変位ベクトル」は「自由ベクトル」だと記述がある。

これは**「時刻－時刻＝時間」**

と似ている。

例　5 時－3 時＝ 2 時間

問題１の解説

【問題１】の $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$ は「自由ベクトル」なのだ。$\overrightarrow{AB}$ は図では固定されているように見えるが，平行移動できる「自由ベクトル」である。

【問題１】の間違いは，時刻の真ん中を求めているのに，時間の真ん中を求めていることになる。6 時までの真ん中は 3 時だが，6 時間の半分を求めているのだ。正午＋3 時間＝ 3 時 とすればよい。

よって，正解は(i)も用いて

$$\vec{m}=\vec{a}+\frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} \text{ となる。}$$

(iii) **「位置ベクトル＋位置ベクトル＝位置ベクトル」**

これは，平面において原点を始点とする 2 つの位置ベクトルの和が平行四辺形の対角線となることから分かる。「**時刻＋時刻＝時刻**」の例と位置ベクトルの終点が直線の方程式となる例を示す。

東京の日の入りが一番遅いのは 6 月 30 日頃で 7 時 1 分，一番早いのは 12 月 6 日頃で 4 時 28 分。

ここで，「日の入り時刻最大位置ベクトル」を $\vec{p_1}$，「日の入り時刻調整位置ベクトル」を $\vec{q}$ とする。

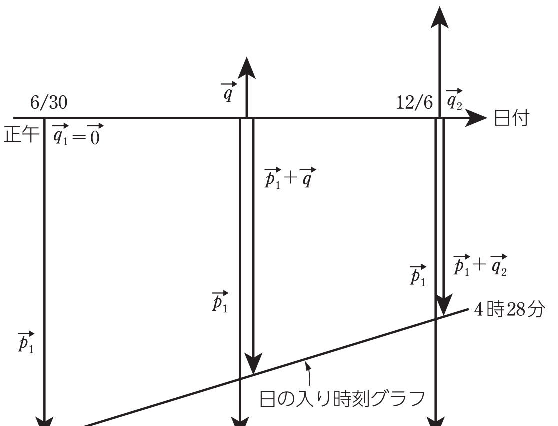
つまり　　$\vec{p_1}=$ 7 時 1 分

これは固定する。

6/30 は　　$\vec{q_1}=$ 0 時 0 分。

12/6 まで $\vec{q}$ は負の方向に絶対値が大きくなり，12/6 には $\vec{q_2}=-2$ 時 33 分 となる。

ここで，$\vec{p_1}+\vec{q}$ の位置ベクトルの終点が変化することにより，日の入り時刻の変化のグラフができる。一般の場合も，位置ベクトルの終点を集める事で曲線を表すことになる。



(iv) **「位置ベクトル」は「自由ベクトル」を誘発できる。**

「位置ベクトル」は「自由ベクトル」の集合に含まれ，たまたま始点が決まっている自由ベクトルである。これは**正午を原点とした時「3 時」は「3 時間と見ることもできる」**のと同様である。

問題 2 の解説　ここで(i)と(iv)の視点から問題 2 を見てみる。

$\overrightarrow{DC}=\vec{c}$ は位置ベクトルであるが，(iv)から $\vec{c}$ と平行な自由ベクトル $\vec{c'}$ を作り出せる。自由ベクトルとして見れば $\vec{c'}=\vec{c}$ となる。

【問題 2】の解答とすれば，位置ベクトル $\overrightarrow{DC}=\vec{c}$ と平行な自由ベクトルを $\vec{c'}$ とすると

$$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{c'}=\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{c}$$

ここで(i)も使っている。

最もこの説明が嫌ならば，

DC 上に 2：3 と内分する点 M′ をとると

$$DM'=\frac{2}{5}\vec{c}$$

よって，$\overrightarrow{DM}=\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{c}$ が問題なく言える。

苦し紛れに時刻と時間の例を作ったが，生徒が自由ベクトルと位置ベクトルとの違いを短時間に的確に理解するには日常的な事柄と関連付ける事が大切だと思う。新しい事柄を理解する方法の 1 つとして本質的に同様な今までの知識と結びつけることが挙げられるからである。

《参考文献》

〔1〕「大学への新数学　数ⅡB　中田，藤田，根岸著(研文書院　1970 年版)」

〔2〕「ベクトル解析　戸田盛和　著(岩波書店 1989 年版)」

〔3〕「入試数学伝説の良問 100　安田亨　著(講談社ブルーバックス　2003 年版)」

〔4〕「旧課程　黄チャート式数学Ⅱ＋B(数研出版 2017 年版)」

〔5〕「線型代数入門　齋藤正彦　著(東京大学出版会　1973 年版)」

〔6〕「明解演習線形代数　小寺平治著(共立出版 1982 年版)」

(元埼玉県立浦和高等学校)