「最終的」な解法の学習効果
～斜軸回転体の体積求値問題の解法を題材にして～

澤幡（さわはた）　通正（みちまさ）

§1. はじめに

回転体の体積を求める求値問題は，大学入試でも花形の１つである。ただし，それは，大部分が xy 座標平面で，その座標軸周りの回転のものである。

ここでは，斜軸回転体の体積求値問題の解法を「**原則的**」，「**標準的**」，そして「**最終的**」なものに分類してみる。その上で，「最終的」な解法は，その証明も含めて示しつつ使えば，様々な学習要素を含み，一番学習効果が高いのではないかと提起したい。

参考文献〔１〕$p.264$ に研究「一般の回転体の体積」として，斜軸に関する回転体の体積の話題が掲載されている。次のようなタイプの問題が提示され，その解答例も示されている。

> **【問題】** 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x$ で囲まれた部分を，直線 $y=x$ の周りに１回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

教科書掲載の解答例は，「原則的」な解答と言うことにしよう。つまり，教科書の解答に則った解答方針を概略で述べると次のようである。

放物線上の点を $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ とし，点Pから直線 $y=x$ に垂線を下ろし，その足をHとする。$\mathrm{OH}=s$ とすると，今回は，PH の距離は s の関数になるから，それを $f(s)$ とおく。このとき，回転体の回転軸に垂直な切断面の面積は，半径が $f(s)$ の円であるから，$\pi\{f(s)\}^2$ と表せる。したがって，求める回転体の体積は $\int_0^{\sqrt{2}}\pi\{f(s)\}^2ds$ である。この後は，s と $f(s)$ を t で表して，s から t に変数変換して積分して値を求めている。

ポイントは２つあり，１つ目は回転軸を「新しい」座標軸としてみることである。その後，回転体を回転軸に垂直に切断して立式している。ただし，変数変換が容易になるように，もとの曲線を媒介変数表示している。これが，２つ目であろう。

この方針での解答は，回転体の体積を，「x 軸」ないしは「y 軸」周りの回転と同様の方法で解いているために，上記２つのポイントを説明すればその理解は容易である。さらに，原則的であるだけに，どんな問題でも適用可能である。

さて，旧課程では，数学Ⅲに「複素数平面」が含まれている。そこでは，複素数平面上で，点の原点周りの回転を学習する。これを利用すれば，斜軸回転体の体積を

「xy 座標平面」の問題→「複素数平面」の利用
→「xy 座標平面」の問題

と変換して解くことになる。さらに，「原則的」な解法の２つ目のポイント，つまり曲線の媒介変数表示を積極的に利用する。この方針による解法を「標準的」とする。以下で**【問題】**の「標準的」な解法例を示しておく。

§2. 「標準的」な解法

【解答例】

放物線上の点は $\mathrm{P}(t,\ t^2)\ (0\leqq t\leqq 1)$ とおける。

直線 $y=x$ と x 軸の正方向とのなす角は $\dfrac{\pi}{4}$ であるから原点Oの周りに $-\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転させて考える。

点Pを原点Oの周りに $-\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転した点を $(x,\ y)$ とおく。複素数平面で考えると

$$x+yi=(t+t^2i)\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(t^2+t)+\frac{1}{\sqrt{2}}(t^2-t)i$$

であるから

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}(t^2+t),\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}(t^2-t)\quad(0\leqq t\leqq 1)$$

$$\cdots\cdots ①$$

直線 $y=x$ は，原点Oの周りに $-\frac{\pi}{4}$ だけ回転させると x 軸に一致するから，求める回転体の体積 V は，①で表される曲線を x 軸の周りに回転して得られる回転体の体積に等しい。

$x=\frac{1}{\sqrt{2}}(t^2+t)$ のとき

x	0	$\to$	$\sqrt{2}$
t	0	$\to$	1

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{\sqrt{2}}(2t+1)>0$$

であり，x と t の対応は右上のようになるから

$$V=\int_0^{\sqrt{2}}\pi y^2dx$$

$$=\pi\int_0^1\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(t^2-t)\right\}^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(2t+1)dt$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\int_0^1(t^2-t)^2(2t+1)dt=\frac{\sqrt{2}}{60}\pi$$

§3.「最終的」な解法

この問題を，少し一般化してみる。つまり，次の**【公式】**が適用できる場合は，それを利用していく解法が「最終的」と言える。その証明は上の**【解答例】**をそのままなぞることでできる。

【公式】 微分可能な関数

$y=f(x)$ $(0<a\leqq x\leqq b)$ のグラフは，直線 $y=(\tan\theta)x$ $\left(0\leqq\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ と異なる 2 点 $(a,\ f(a))$，$(b,\ f(b))$ のみで共有点をもつとする。このとき，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=(\tan\theta)x$ で囲まれた図形を，直線 $y=(\tan\theta)x$ の周りに回転してできる回転体の体積 V は，次のようである。

$$\boldsymbol{V=\pi\cos\theta\int_a^b\{f(x)-(\tan\theta)x\}^2dx}$$

証明

曲線 $y=f(x)$ 上の点は $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ $(0<a\leqq t\leqq b)$ とおける。

直線 $y=(\tan\theta)x$ は，x 軸の正方向となす角が θ であるから，原点Oの周りに $-\theta$ だけ回転させて考える。

点Pを原点Oの周りに $-\theta$ だけ回転した点を $(x,\ y)$ とおく。複素数平面で考えると

$$x+yi=\{t+if(t)\}\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$$

$$=t\cos\theta+f(t)\sin\theta+\{-t\sin\theta+f(t)\cos\theta\}i$$

であるから

$$x=t\cos\theta+f(t)\sin\theta,$$

$$y=-t\sin\theta+f(t)\cos\theta\quad(0<a\leqq t\leqq b)$$

$$\cdots\cdots ①$$

直線 $y=(\tan\theta)x$ は，原点Oの周りに $-\theta$ だけ回転させると x 軸に一致するから，求める回転体の体積 V は，①で表される曲線を x 軸の周りに回転して得られる回転体の体積に等しい。

$x=t\cos\theta+f(t)\sin\theta$ より

$$\frac{dx}{dt}=\cos\theta+f'(t)\sin\theta$$

また，$a\tan\theta=f(a)$，$b\tan\theta=f(b)$ であるから，x と t の対応は

x	$\frac{a}{\cos\theta}$	$\to$	$\frac{b}{\cos\theta}$
t	a	$\to$	b

となる。

よって

$$V=\int_{\frac{a}{\cos\theta}}^{\frac{b}{\cos\theta}}\pi y^2dx$$

$$=\pi\int_a^b\{-t\sin\theta+f(t)\cos\theta\}^2\{\cos\theta+f'(t)\sin\theta\}dt$$

ここで，$g(t)=-t\tan\theta+f(t)$ とおくと，

$g(a)=g(b)=0$ であり，

また，$g'(t)=-\tan\theta+f'(t)$ より，

$f'(t)=g'(t)+\tan\theta$ であるから

$$\cos\theta+f'(t)\sin\theta=\cos\theta+\{g'(t)+\tan\theta\}\sin\theta$$

$$=\frac{1+g'(t)\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta}$$

よって

$$V=\pi\cos^2\theta\int_a^b\{g(t)\}^2\frac{1+g'(t)\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta}dt$$

$$=\pi\cos\theta\left[\int_a^b\{g(t)\}^2dt+\int_a^b\{g(t)\}^2g'(t)\cos\theta\sin\theta dt\right]$$

$$=\pi\cos\theta\int_a^b\{g(t)\}^2dt+\pi\cos^2\theta\sin\theta\left[\frac{1}{3}\{g(t)\}^3\right]_a^b$$

$$=\pi\cos\theta\int_a^b\{f(x)-(\tan\theta)x\}^2dx$$

が得られる。

【注意】

1．この公式は，いわゆる「**傘型分割による体積計算**」と言われているものの特殊な場合である。（参考文献〔2〕$p.457$ 参照）

2．θ が 0 のときは x 軸の周りの回転である。

「最終的」な解法は，この公式を適用することである。**【問題】**の場合は，この公式に $a=0$，$b=1$，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$，$f(x)=x^2$ を代入すればよい。

以上で，斜軸回転体の体積求値問題の解法の分類は終わる。さすがに，「最終的な」解法は，それを利用すれば，短時間で解ける。ここでは，3 つの解法のうち，様々な学習要素を学べる「最終的」な解法を，その証明も含めて学習していくことを勧めたい。その証明には，「標準的」な解法をそのままなぞればよいのも嬉しい。最後に，回転する曲線が余弦曲線の場合を**【作問例】**として，花子さんと太郎さんの会話形式で紹介する。これを「原則的」な解法と「標準的」な解法で解いて比較し，その上で，「最終的」な解法も適用してみることも面白いだろう。ここでは，「標準的」な解法で会話をすすめることにしよう。

§4. 作問例

【作問例】

> 曲線 $y=\cos x\ \left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と 2 直線 $y=x+\dfrac{\pi}{2}$，$y=-x+\dfrac{\pi}{2}$ とで囲まれた図形 S を考える。図形 S を直線 $y=x+\dfrac{\pi}{2}$ の周りに 1 回転して得られる立体の体積 V を求めよ。

ある日の数学の授業後に上のような課題が出された。以下の会話は，その課題を巡って放課後に交わされたものである。

花子：斜軸回転体の体積を求める問題ね。

太郎：これまでは，回転する図形が放物線だったが，今回は余弦曲線だね。

花子：直線の周りにどんな曲線を回転させても，まずは原則にしたがって考えてみるべきでしょう。

太郎：ここでは，直線 $y=x+\dfrac{\pi}{2}$ は x 軸の正方向とのなす角が $\dfrac{\pi}{4}$ だから，これを原点 O の周りに $-\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転して，これが x 軸に一致するようにしてみようよ。

花子：うーん。回転の中心は原点ではなく，複素数平面では点 $-\dfrac{\pi}{2}$ の周りでなければ直線 $y=x+\dfrac{\pi}{2}$ は x 軸に一致しないわね。

太郎：あっ，そうだね。$y=\cos x$ 上の点を $\mathrm{P}(t,\ \cos t)$ として，これを複素数平面上で点 $-\dfrac{\pi}{2}$ を中心として $-\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転した点を $(x,\ y)$ とおくと

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$$

であるから

$$x+yi=\left(t+i\cos t+\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)-\frac{\pi}{2}$$

よって，$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(t+\cos t+\dfrac{\pi}{2}\right)-\dfrac{\pi}{2}$，

$y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(-t+\cos t-\dfrac{\pi}{2}\right)$ となるね。

花子：t の値の範囲は，$-\dfrac{\pi}{2}$ 以上 $\dfrac{\pi}{2}$ 以下ね。

太郎：$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(t+\cos t+\dfrac{\pi}{2}\right)-\dfrac{\pi}{2}$ より，

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-\sin t)$ となる。この値は，

$-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}$ で正だから，求める回転体の体積 V は $V=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{\sqrt{2}}}\pi y^2dx$ と式が立てられるね。

花子：後は，x が $-\dfrac{\pi}{2}$ から $-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ のとき，t の値の範囲は $-\dfrac{\pi}{2}$ から $\dfrac{\pi}{2}$ に対応しているので

$$V=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\pi\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-t+\cos t-\frac{\pi}{2}\right)\right\}^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\sin t)\,dt$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(-t+\cos t-\frac{\pi}{2}\right)^2(1-\sin t)\,dt$$

を計算すればよいわけね。

太郎：$f(t)=-t+\cos t-\dfrac{\pi}{2}$ とおくと，

$\sin t=-1-f'(t)$ となるから

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\{f(t)\}^2\{2+f'(t)\}dt$$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\{f(t)\}^2 dt+\left[\frac{1}{3}\{f(t)\}^3\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

とする変形は，授業で紹介されたね。

花子：計算すると答えは，$\dfrac{\sqrt{2}\,\pi^2}{12}(\pi^2-9)$ ね。

太郎：こんな問題，試験に出されたら試験時間の 50 分以内には解き終わらないよ。

花子：だから課題問題として出されたのでしょうね。

《参考文献》

〔1〕『改訂版　数学Ⅲ』(数研出版) $p.$ 264

〔2〕『改訂版　チャート式　基礎からの数学Ⅲ』(数研出版) $p.$ 456　練習 280 (2)，$p.$ 457

（茨城県　水戸葵陵高等学校）