カッシーニの公式の一般化について

礒部（いそべ）　一哉（かずや）

§1. はじめに

先日，数研通信 No.107 の「正接の整数問題とフィボナッチ数列」を読ませていただきました。その中で，フィボナッチ数列 ($F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$, $F_1=F_2=1$) についての有名な性質として

$$\boldsymbol{F_{n+2}F_n=F_{n+1}{}^2-(-1)^n}$$

が挙げてあり，調べてみると「**カッシーニの公式**」と呼ぶようです。また，武田先生は稿の中で

$$\boldsymbol{F_{n+4}F_n=F_{n+2}{}^2-(-1)^n}$$

であることを推論し，証明もできると書いてありました。そこで

$$F_{n+6}F_n-F_{n+3}{}^2$$

はどうなるか，±1 が繰り返すか？また一般に

$$F_{k+s}F_{k-s}-F_k{}^2$$

はどうなるかを実験したところ

$$\boldsymbol{F_{k+s}F_{k-s}-F_k{}^2=-(-1)^{k-s}F_s{}^2}$$

となることが予想できました。これは既知のことのようです。

§2. 予想の証明

具体的には $s=3$ のとき，フィボナッチ数列 1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，…… は，$F_3=2$ であり

$$13\times1-3^2=-(-1)^{4-3}\cdot2^2=4$$
$$21\times1-5^2=-(-1)^{5-3}\cdot2^2=-4$$
$$34\times2-8^2=-(-1)^{6-3}\cdot2^2=4$$
$$55\times3-13^2=-(-1)^{7-3}\cdot2^2=-4$$
$$\vdots$$

となり，ある項から 3 個ずつ離れた項の積とその項の 2 乗の差は ±4 を繰り返しています。以下に証明をします。

証明　$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$，$F_1=F_2=1$ ならば

$F_{k+s}F_{k-s}-F_k{}^2=-(-1)^{k-s}F_s{}^2$ を示す。

$x^2=x+1$ の解を α，β ($\alpha>\beta$) とすると，

$\alpha\beta=-1$，$F_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$ であるから

$$\text{左辺}=F_{k+s}F_{k-s}-F_k{}^2$$
$$=\frac{\alpha^{k+s}-\beta^{k+s}}{\alpha-\beta}\times\frac{\alpha^{k-s}-\beta^{k-s}}{\alpha-\beta}-\left(\frac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha-\beta}\right)^2$$
$$=\frac{2\cdot(-1)^k+(-1)^{k-s+1}(\alpha^{2s}+\beta^{2s})}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$\text{右辺}=-(-1)^{k-s}F_s{}^2=(-1)^{k-s+1}\left(\frac{\alpha^s-\beta^s}{\alpha-\beta}\right)^2$$
$$=\frac{2\cdot(-1)^k+(-1)^{k-s+1}(\alpha^{2s}+\beta^{2s})}{(\alpha-\beta)^2}=\text{左辺}$$

終

§3. リュカ数列

次に，フィボナッチ数列と構造は同じで第 2 項が異なる**リュカ数列** ($L_{n+2}=L_{n+1}+L_n$，$L_1=1$，$L_2=3$) についても同じようなことが言えるかを実験したところ

$$\boldsymbol{L_{k+s}L_{k-s}-L_k{}^2=5\cdot(-1)^{k-s}F_s{}^2}$$

となることが予想できました。(今度はフィボナッチ数列が含まれています。)

具体的には $s=3$ のとき，リュカ数列 1，3，4，7，11，18，29，47，76，123，…… は，$F_3=2$ であり

$$29\times1-7^2=5\cdot(-1)^{4-3}\cdot2^2=-20$$
$$47\times3-11^2=5\cdot(-1)^{5-3}\cdot2^2=20$$
$$76\times4-18^2=5\cdot(-1)^{6-3}\cdot2^2=-20$$
$$123\times7-29^2=5\cdot(-1)^{7-3}\cdot2^2=20$$
$$\vdots$$

となり，ある項から 3 個ずつ離れた項の積とその項の 2 乗の差は ±20 を繰り返しています。証明は略します。

§4. 第 2 項が変わるとどうなるか

これらを並べると

$$F_{k+s}F_{k-s}-F_k{}^2=-(-1)^{k-s}F_s{}^2$$
$$L_{k+s}L_{k-s}-L_k{}^2=5\cdot(-1)^{k-s}F_s{}^2$$

であり，これはフィボナッチ数列の初項と第 2 項によって係数が変わるだけだと考えました。となると，$f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$ のとき，初項を 1，第 2 項を r とおき，予測をしていくと

$r=1$ のとき　$f_{k+s}f_{k-s}-f_k{}^2=-(-1)^{k-s}F_s{}^2$
……フィボナッチ数列

$r=2$ のとき　$f_{k+s}f_{k-s}-f_k{}^2=(-1)^{k-s}F_s{}^2$
(……これも一応フィボナッチ数列)

$r=3$ のとき　$f_{k+s}f_{k-s}-f_k{}^2=5\cdot(-1)^{k-s}F_s{}^2$
……リュカ数列

$r=4$ のとき　$f_{k+s}f_{k-s}-f_k{}^2=11\cdot(-1)^{k-s}F_s{}^2$

$r=5$ のとき　$f_{k+s}f_{k-s}-f_k{}^2=19\cdot(-1)^{k-s}F_s{}^2$

⋮

となっていくので，一般に
$f_{k+s}f_{k-s}-f_k{}^2=(r^2-r-1)(-1)^{k-s}F_s{}^2$ であろうと予測し証明しました。証明方法は先ほどと同様のため略します。これは既知のことでしょうか？調べても出てきませんでした。

ここで，r^2-r-1 は，$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ の係数と一致していると思いましたので，一般に，
$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$，$a_1=a_1$，$a_2=a_2$ のとき，
$a_{k+s}a_{k-s}-a_k{}^2$ がどうなるかを数値計算で調べて予測したところ

$$\boldsymbol{a}_{k+s}\boldsymbol{a}_{k-s}-\boldsymbol{a}_k{}^2=(\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_0-\boldsymbol{a}_1{}^2)(-\boldsymbol{q})^{k-s}\boldsymbol{A}_s{}^2$$

ただし　$A_{n+2}=pA_{n+1}+qA_n$，$A_1=1$，$A_2=p$

となりました。これは，一般的な 3 項間漸化式の初項が 1，第 2 項が p (A_{n+1} の係数) である数列 (すなわち，$A_0=0$，$A_1=1$ の数列) を準備しておけば，同じような恒等式が得られました。

証明　$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$，$a_1=a_1$，$a_2=a_2$ かつ
$A_{n+2}=pA_{n+1}+qA_n$，$A_1=1$，$A_2=p$ ならば
$a_{k+s}a_{k-s}-a_k{}^2=(a_2a_0-a_1{}^2)(-q)^{k-s}A_s{}^2$　を示す。

$x^2=px+q$ の解を α，β $(\alpha>\beta)$ とすると

$$\alpha\beta=-q$$

簡略化のため，$\dfrac{a_2-\beta a_1}{\alpha}=A$，$\dfrac{a_2-\alpha a_1}{\beta}=B$

とおき，$a_n=\dfrac{A\alpha^n-B\beta^n}{\alpha-\beta}$ と表す。

$AB=-(a_2a_0-a_1{}^2)$，$A_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$ より

$$\begin{aligned}右辺&=(a_2a_0-a_1{}^2)(-q)^{k-s}A_s{}^2\\&=-AB(-q)^{k-s}\frac{\alpha^{2s}+\beta^{2s}-2\cdot(-q)^s}{(\alpha-\beta)^2}\\&=\frac{(-q)^kAB}{(\alpha-\beta)^2}\left\{2-\frac{\alpha^{2s}+\beta^{2s}}{(-q)^s}\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}左辺&=a_{k+s}a_{k-s}-a_k{}^2\\&=\frac{A\alpha^{k+s}-B\beta^{k+s}}{\alpha-\beta}\times\frac{A\alpha^{k-s}-B\beta^{k-s}}{\alpha-\beta}\\&\qquad-\left(\frac{A\alpha^k-B\beta^k}{\alpha-\beta}\right)^2\\&=\frac{(-q)^kAB}{(\alpha-\beta)^2}\left\{2-\frac{\alpha^{2s}+\beta^{2s}}{(-q)^s}\right\}=右辺\end{aligned}$$

終

§5. さらに一般化

また，a_{k+s} と a_{k-s} のように a_k から前後に s 個ずれただけではなく，さらに l ずれた
$a_{k+s+l}a_{k-s}-a_ka_{k+l}$ を予想したところ

$$\boldsymbol{a}_{k+s+l}\boldsymbol{a}_{k-s}-\boldsymbol{a}_k\boldsymbol{a}_{k+l}=(\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_0-\boldsymbol{a}_1{}^2)(-\boldsymbol{q})^{k-s}\boldsymbol{A}_s\boldsymbol{A}_{s+l}$$

であると予想できました。それを証明します。

定理 (カッシーニの定理の一般化)

$\boldsymbol{a}_{n+2}=\boldsymbol{p}\boldsymbol{a}_{n+1}+\boldsymbol{q}\boldsymbol{a}_n$ かつ

$\boldsymbol{A}_{n+2}=\boldsymbol{p}\boldsymbol{A}_{n+1}+\boldsymbol{q}\boldsymbol{A}_n$，$\boldsymbol{A}_0=0$，$\boldsymbol{A}_1=1$ ならば

$$\boldsymbol{a}_{k+s+l}\boldsymbol{a}_{k-s}-\boldsymbol{a}_k\boldsymbol{a}_{k+l}=(\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_0-\boldsymbol{a}_1{}^2)(-\boldsymbol{q})^{k-s}\boldsymbol{A}_s\boldsymbol{A}_{s+l}$$

証明　$x^2=px+q$ の解を α，β $(\alpha>\beta)$ とすると

$$\alpha\beta=-q$$

簡略化のため，$\dfrac{a_2-\beta a_1}{\alpha}=A$，$\dfrac{a_2-\alpha a_1}{\beta}=B$

とおくと

$$AB=\frac{a_2{}^2-pa_1a_2-qa_1{}^2}{-q}=\frac{a_2(a_2-pa_1)-qa_1{}^2}{-q}=-(a_2a_0-a_1{}^2)$$

また，$a_n=\dfrac{A\alpha^n-B\beta^n}{\alpha-\beta}$，$A_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$ より

$$\begin{aligned}左辺&=a_{k+s+l}a_{k-s}-a_ka_{k+l}\\&=\frac{A\alpha^{k+s+l}-B\beta^{k+s+l}}{\alpha-\beta}\times\frac{A\alpha^{k-s}-B\beta^{k-s}}{\alpha-\beta}\\&\qquad-\frac{A\alpha^k-B\beta^k}{\alpha-\beta}\times\frac{A\alpha^{k+l}-B\beta^{k+l}}{\alpha-\beta}\\&=\frac{-(-q)^{k-s}AB}{(\alpha-\beta)^2}\{\alpha^{2s+l}+\beta^{2s+l}\\&\qquad-(\alpha^l+\beta^l)(-q)^s\}\end{aligned}$$

$$\text{右辺}=(a_2a_0-a_1{}^2)(-q)^{k-s}A_sA_{s+l}$$
$$=\frac{-(-q)^{k-s}AB}{(\alpha-\beta)^2}\{\alpha^{2s+l}+\beta^{2s+l}-(\alpha^l+\beta^l)(-q)^s\}$$
$$=\text{左辺}$$

終

§6. まとめ

フィボナッチ数列 ($F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$, $F_1=F_2=1$) について

$F_{n+2}F_n=F_{n+1}{}^2-(-1)^n$ (カッシーニの公式)

これは上記定理の $p=q=a_1=a_2=1$ の場合で，さらに，$s=1$, $l=0$ の場合です。

$l=0$ の場合

リュカ数列 ($L_{n+2}=L_{n+1}+L_n$, $L_1=1$, $L_2=3$) ならば

$L_{k+s}L_{k-s}-L_k{}^2=5\cdot(-1)^{k-s}F_s{}^2$

数列が 2 種類出てくるのが嫌なので，$a_0=0$, $a_1=1$ に限定すれば

$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$, $a_0=0$, $a_1=1$ ならば

$a_{k+s}a_{k-s}-a_k{}^2=-(-q)^{k-s}a_s{}^2$

さらに，$-q=1$ とし，変形すれば

$a_{n+2}=pa_{n+1}-a_n$, $a_0=0$, $a_1=1$ ならば

$a_{k+s}a_{k-s}=(a_k+a_s)(a_k-a_s)$

これは，数列 0, 1, p, p^2-1, p^3-2p, p^4-3p^2+1, p^5-4p^3+3p, $p^6-5p^4+6p^2-1$, ……

が，すべて $n>2$ で因数分解可能であることを意味する。

例えば，$p^6-5p^4+6p^2-1$ の因数はなかなか見つけにくいが，$n=7$ より $k=4$, $s=3$ とすれば

$$a_{4+3}a_{4-3}=(a_4+a_3)(a_4-a_3)=a_7a_1=a_7$$
$$=(p^3-2p+p^2-1)(p^3-2p-p^2+1)$$

と簡単に因数分解ができる。

$p=3$ ならば，$a_{n+2}=3a_{n+1}-a_n$ で，この数列は 1, 3, 8, 21, 55, 144, 377, …… となり，これはフィボナッチ数列の偶数番目となるので

$$F_{2m+2n}F_{2m-2n}=(F_{2m}+F_{2n})(F_{2m}-F_{2n})$$

というものも見つかる。

《参考文献》

〔1〕 数研通信 107 号
武田眞史
「正接の整数問題とフィボナッチ数列」

(愛知県　至学館高等学校)