コラッツ予想と3進法

裏（うら）　俊男（としお）

§1. はじめに

小学生にも分かる内容なのに，証明されていない数学の問題として「**コラッツ予想**」があり，少し考えてみた。

ここでは，コラッツの操作を，任意の自然数nに対して

A：nが偶数ならば，nを2で割る

B：nが奇数ならば，nを3倍したのち，1を加える

と，A，Bで表しておくことにする。

コラッツの予想というのは「**どのような自然数もA，Bを繰り返すと，有限回で必ず1に終結する**」というものである。

2のベキ2^n以外は，偶数であってもAを繰り返せば奇数になるので，「**任意の奇数について成り立つ予想**」と言い換えてもよいだろう。

§2. 操作Bについて

10進法表記の数を3倍するのは，桁数が大きくなると少々大変ではあるが，3進法表記の数なら，1桁左に動かすだけである。すなわち，ある自然数aに対して

$$3\times a=a,\ 0_{(3)}$$

と表記することにする。よって，操作Bを施すと

$$a \Longrightarrow a,\ 1_{(3)}$$

§3. 3進法表記を拡張する

3進法表記では，各位の数字は0，1，2のいずれかであるが，ここでは2のベキも許すことにする。よって，例えば

$20=4\times3+8=2^2,\ 2^3{}_{(3)}$

$37=1\times9+4\times3+16=1,\ 2^2,\ 2^4{}_{(3)}$　等々

また

$$\frac{a}{b^n},\ 1_{(3)}=\frac{a}{b^n}\times3+1=\frac{a\times3+b^n}{b^n}=\frac{a,\ b^n{}_{(3)}}{b^n}$$

よって　$\{b^{-n}\times a\},\ 1_{(3)}=b^{-n}\times\{a,\ b^n{}_{(3)}\}$

にも注意しておく。

§4. 3進法表記で操作A，Bを追う

簡単のために，

操作Aを「→」，操作Bを「⇒」

で表すことにする。

奇数に，操作A，Bを行ってみる。

以下，$_{(3)}$は略し，右辺は10進法で表記する。

(1)　$a=3$

⇒　$a,\ 1=10=2\times5$

→　$2^{-1}(a,\ 1)=5$

⇒　$2^{-1}(a,\ 1),\ 1=16=2^4$

よって　$2^{-1}(a,\ 1,\ 2)=2^4$

ゆえに　$3,\ 1,\ 2=2^5$

（これはもちろん

$$3\cdot3^2+1\cdot3^1+2\cdot3^0=2^5$$

のことである）

(2)　$a=5$

⇒　$a,\ 1=16=2^4$

すなわち　$5,\ 1=2^4$　……①

(3)　$a=7$

⇒　$a,\ 1=22=2\times11$

→　$2^{-1}(a,\ 1)=11$

⇒　$2^{-1}(a,\ 1),\ 1=34$

すなわち　$2^{-1}(a,\ 1,\ 2)=2\times17$

→　$2^{-2}(a,\ 1,\ 2)=17$

⇒　$2^{-2}(a,\ 1,\ 2),\ 1=52$

よって　$2^{-2}(a,\ 1,\ 2,\ 2^2)=2^2\times13$

→→　$2^{-4}(a,\ 1,\ 2,\ 2^2)=13$

⇒　$2^{-4}(a,\ 1,\ 2,\ 2^2),\ 1=40$

ゆえに　$2^{-4}(a,\ 1,\ 2,\ 2^2,\ 2^4)=2^3\times5$

→→→　$2^{-7}(a,\ 1,\ 2,\ 2^2,\ 2^4)=5$

①を使って

$$2^{-7}(a,\ 1,\ 2,\ 2^2,\ 2^4),\ 1=2^4$$

よって　$2^{-7}(a,\ 1,\ 2,\ 2^2,\ 2^4,\ 2^7)=2^4$

ゆえに　$7,\ 1,\ 2,\ 2^2,\ 2^4,\ 2^7=2^{11}$

同様にして，この表現のコレクションを得る。

$9,\ 1,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^6,\ 2^9=2^{13}$

$11,\ 1,\ 2,\ 2^3,\ 2^6=2^{10}$

$13,\ 1,\ 2^3=2^7$

$15,\ 1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^8=2^{12}$

$17,\ 1,\ 2^2,\ 2^5=2^9$

$19,\ 1,\ 2,\ 2^4,\ 2^5,\ 2^7,\ 2^{10}=2^{14}$

$21,\ 1=2^6$

$23,\ 1,\ 2,\ 2^2,\ 2^7=2^{11}$

$25,\ 1,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^6,\ 2^7,\ 2^9,\ 2^{12}=2^{16}$

(27 は非常に長い桁になるので省略)

$29,\ 1,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^6,\ 2^9=2^{13}$

……

奇数 a がコラッツ予想に従うならば，この形に表されることは，計算例から自明だろう。

よって

コラッツ予想が成り立つ $\Longleftrightarrow$

「どんな奇数 a も

適切な　$0=a_1<a_2<\cdots<a_{m-1}<a_m$

によって，3 進法で

$a,\ 2^{a_1},\ 2^{a_2},\ 2^{a_3},\ \cdots\cdots,\ 2^{a_{m-1}},\ 2^{a_m}=2^{4+a_m}$

と表せる。」

…と書いてしまったが，すでに奇数 21 が例外になっている。これも含めて，修正は後ろの §7. で行うことにし，この式を**C形式**と呼ぶことにする。

§5. A，B はどのように繰り返すか？

例として，奇数 7

$7,\ 1,\ 2,\ 2^2,\ 2^4,\ 2^7=2^{11}$

を取り上げてみる。

「7,」を取り除き，等号をカンマ 1 つに置き換えると

$2^0,\ 2^1,\ 2^2,\ 2^4,\ 2^7,\ 2^{11}$

ここで，パターンの置き換え

「$2^m,\ 2^{m+n}$」→「B，A（n 個），」

をすると

B，A，B，A，B，A，A，B，A，A，A，B，A，A，A，A

この順で操作して 7 は 1 に終結する。

§6. 奇数を生成するツリー

コラッツ予想は操作 A，B を繰り返すものだが，奇数 $(2n+1)$ に操作Bを施すと $(6n+4)$ になって，偶数だから必ず次に操作Aを行うことになる。

(よって，$(3n+2)$ になる)

操作Bの代わりに，B に続けてAを行う操作を新たに B′ とし，A または B′ の逆操作として α かつ β を考える，すなわち

α：2 倍する

かつ

β：$(3n+2)$ の形なら，

2 倍したのち，1 を引いて 3 で割る

これにより，1 から次々に数を生成してみる。

すなわち

```
……−m−2m−4m−……
```

そして，$(3n+2)$ の形が現れたときには

```
……−(3n+2)−(6n+4)−……
              |
            (2n+1)−(4n+2)−……
```

したがって

```
1−2−4−8−16−32−64−128−256−512……
         |     |        |
         5……   21       85……
```

16 から奇数 5 が生じ，さらに生成の枝を作る。

```
5−10−20−40−80−160−320−640−……
|       |       |        |
3       13……   53……     213
```

3 や 21 など，3 の倍数は 2 倍を繰り返しても 3 の倍数であり続け，$(3n+2)$ の形にならないので，奇数を生成しないから 2 倍の枝を伸ばす必要はない。

§7. 奇数生成ツリーとC形式の関係

例として奇数 11 で考えてみる。

ツリーで 11 が現れるのは

```
1−2−4−8−16−……
         |
         5−10−20−40−……
                 |
                 13−26−52−……
                        |
                        17−34−……
                            |
                            11
```

奇数 11 のＣ形式

$$11,\ 1,\ 2,\ 2^3,\ 2^6=2^{10}$$

の各桁を，以下のように配置してみる：

(ア)　右桁の数を下に書く

(イ)　下に書いた数を 2 倍して並べていき，さらに右桁の数に等しくなるまで繰り返す

(ウ)　(ア), (イ)を繰り返す

$$\begin{array}{lllll}
11 & & & & \\
1,\ 2 & & & & \\
 & 2,\ 2^2,\ 2^3 & & & \\
 & & 2^3,\ 2^4,\ 2^5,\ 2^6 & & \\
 & & & 2^6,\ 2^7,\ 2^8,\ 2^9,\ 2^{10} &
\end{array}$$

これは，1 から 11 に至るツリーの図を 180° 回転した形になっている，すなわち

「奇数 $\boldsymbol{a}$ のツリーとＣ形式は 1 対 1 に対応している」

したがって，コラッツ予想とは，すべての奇数はこのツリーのどこかに必ず現れる，ということを主張していることになる。

Web 上に見られる，コラッツ予想についての色々な解説の中で，奇数ツリーの図が添えられているとき，放射状の形に描かれているものがほとんどのようだが(広がってゆく様を伝えるために仕方がないと思うが)，上記のようにＣ形式との対応を考えてみると，2 倍は水平に，生じた奇数の枝は直下に置く書き方がよいのではないかと思う。

ところで，§3 の奇数 3, 5, ……, 29 は 21 を除き，いずれも「−16−5……」の枝から生じる奇数であるから，Ｃ形式の両辺の最下位は ……$2^{a_m}=2^{4+a_m}$ となったが，奇数 21 は「−64−21」であるからＣ形式の両辺の最下位は　21，$2^0=2^{6+0}$

であり，奇数 113 は「−256−85…」の枝に生じ，

```
1—……—16—……—256—……
                 |
                 85 —170—340……
                          |
                          113
```

$$256=2^8$$

であり，Ｃ形式の両辺の最下位は

$$113,\ 1,\ 2^2=2^{10}=2^{8+2}$$

よって，Ｃ形式の正しい形は

「$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{2}^{a_1},\ \boldsymbol{2}^{a_2},\ \cdots\cdots,\ \boldsymbol{2}^{a_{m-1}},\ \boldsymbol{2}^{a_m}{}_{(3)}=\boldsymbol{2}^{k+a_m}$

$\boldsymbol{0=a_1<a_2<\cdots\cdots<a_{m-1}<a_m}$

$\boldsymbol{k}$ は 4 以上の偶数」

m や $(k+a_m)$ の意味は言うまでもないだろう。

§8. ツリーからＣ形式を求める

§7. の，1 から 11 を生成するツリーを見る。ツリー生成の手順を 3 進法で追ってみる。

(今度は 3 で割る計算が入るが，3 進法では 1 桁右にずらせばよい)

$1=1$

1 から右に 4 つ進み(2 倍を 4 回繰返す)

$16=2^4$

下に枝分れし(1 を引いて，3 で割る)

$15=2^4-1$

$5=0.(2^4-1)$

右に 3 つ進み(2 倍を 3 回繰返す)

$40=0.(2^7-2^3)$

下に枝分れし(1 を引いて，3 で割る)

$39=(-1).(2^7-2^3)$

$13=0.(-1),\ (2^7-2^3)$

右に 2 つ進み(2 倍を 2 回繰返す)

$52=0.(-2^2),\ (2^9-2^5)$

下に枝分れし(1 を引いて，3 で割る)

$51=(-1).(-2^2),\ (2^9-2^5)$

$17=0.(-1),\ (-2^2),\ (2^9-2^5)$

右に 1 つ進み(2 倍を 1 回)

$34=0.(-2),\ (-2^3),\ (2^{10}-2^6)$

下に枝分れし(1 を引いて，3 で割る)

$33=(-1).(-2),\ (-2^3),\ (2^{10}-2^6)$

$11=0.(-1),\ (-2),\ (-2^3),\ (2^{10}-2^6)$

右辺の負の項を，左辺の同じ位に移項して

$11.\ 1,\ 2,\ 2^3,\ 2^6=0.\ 0,\ 0,\ 0,\ 2^{10}$

小数点を移動して

$11,\ 1,\ 2,\ 2^3,\ 2^6=2^{10}$

奇数ツリーはコラッツの操作を逆にしたものであるから，同じＣ形式が得られても当然なのだろうが，式中に負の項が生じても上手くいったところに位取り記数法の面白さを改めて感じる。

(元東京都立小山台高等学校)