1次不定方程式の特殊解の求め方3種
～計算メモのための効率的な記法～

うすい　たつや
臼井　達哉

§1. はじめに

1次不定方程式で係数が大きい場合は特殊解を求めるのが面倒です。特殊解の求め方は答案に書く必要がないことが多いため，生徒はメモとしての計算ができればよいと思います。メモとしての計算では，速く計算するために記法が重要です。本稿では，3つの解法について，生徒が効率的に計算できる記法をまとめました。

問題　$149x+46y=1$ の整数解を1つ求めよ。

互除法は，数研出版「チャート式解法と演習　数学Ⅰ＋A」にある次の形式を用います。

$$
\begin{array}{rrr}
\overline{\ \ 5} & \overline{\ \ 4} & \overline{\ \ \ 3} \\
2)11 &)46 &)149 \\
10 & 44 & 138 \\
\hline
1 & 2 & 11
\end{array}
$$

§2. 解法1

多くの教科書に採用されている方法です。

「**余り＝被除数－商×除数**」ですから，互除法の余りを見れば $1=11-5\cdot2$，$2=46-4\cdot11$，$11=149-3\cdot46$ は分かります。教科書や問題集の解答ではこれらが書いてあることが多いのですが，メモでは不要ですから，互除法を見ながら次のメモで計算できます。

$$
\begin{array}{rrr}
\overline{\ \ 5} & \overline{\ \ 4} & \overline{\ \ \ 3} \\
2)11 &)46 &)149 \\
10 & 44 & 138 \\
\hline
1 & 2 & 11
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
1&=11-5\cdot2\\
&=11-5\cdot(46-4\cdot11)\\
&=-5\cdot46+21\cdot11\\
&=-5\cdot46+21\cdot(149-3\cdot46)\\
&=21\cdot149-68\cdot46
\end{aligned}
$$

以上で $x=21$，$y=-68$ が得られます。さらにメモとして

$$
\begin{cases}
1+(-5)\cdot(-4)=21 & \cdots\cdots ① \\
-5+21\cdot(-3)=-68 & \cdots\cdots ②
\end{cases}
$$

が必要かもしれません。

§3. 解法2

参考文献〔1〕は非常に効率がよいアルゴリズムです。この記法を改良したものが参考文献〔2〕です。今回は，参考文献〔2〕で用いた縦書きを横書きにしました。より書きやすくなったと思います。まず，商の5，4，3にマイナスを付けて次のように書きます。

(1)
$$
\begin{array}{c|ccccc}
\times & & -5 & -4 & -3 & \\
\hline
 & 0 & 1 & & & \\
\hline
+ & & & & &
\end{array}
$$

以下，計算過程を示します。

(2)
$$
\begin{array}{c|ccccc}
\times & & -5 & -4 & -3 & \\
\hline
 & 0 & 1 & & & \\
\hline
+ & & -5 & & &
\end{array}
$$

(3)
$$
\begin{array}{c|ccccc}
\times & & -5 & -4 & -3 & \\
\hline
 & 0 & 1 & -5 & & \\
\hline
+ & & -5 & & &
\end{array}
$$

(4)
$$
\begin{array}{c|ccccc}
\times & & -5 & -4 & -3 & \\
\hline
 & 0 & 1 & -5 & & \\
\hline
+ & & -5 & 20 & &
\end{array}
$$

(5)
$$
\begin{array}{c|ccccc}
\times & & -5 & -4 & -3 & \\
\hline
 & 0 & 1 & -5 & 21 & \\
\hline
+ & & -5 & 20 & &
\end{array}
$$

(6)
$$
\begin{array}{c|ccccc}
\times & & -5 & -4 & -3 & \\
\hline
 & 0 & 1 & -5 & 21 & -68 \\
\hline
+ & & -5 & 20 & -63 &
\end{array}
$$

以上から計算メモは次の通りです。

$$
\begin{array}{rrr}
\overline{\;\;5} & \overline{\;\;4} & \overline{\;\;\;3} \\
2)\,11 &)\,46 &)\,149 \\
\underline{10} & \underline{44} & \underline{138} \\
1 & 2 & 11
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccc}
\times & & -5 & -4 & -3 & \\
\hline
 & (0) & 1 & -5 & 21 & -68 \\
+ & & & & & \\
\hline
 & & -5 & 20 & -63 &
\end{array}
$$

左端の 0 は省略できます。中央の行の右端から順に $y=-68$, $x=21$ です。右のように，互除法の最初の部分と比較し，たすき掛けを用いて x, y を判断します。

$$
\begin{array}{rr}
 & \overline{\;\;\;3} \\
46) & 149 \\
21 & -68
\end{array}
$$

本稿で紹介した方法以外にもいろいろな方法がありますが，私が知る限りではこの方法が最速です。

§4. 解法 3

知人から聞いた記法です。参考文献〔 3 〕の $p.465$ 基本例題 126 の別解，参考文献〔 4 〕の $p.177$〜$p.179$ にある 284 番の別解と同じ原理です。

$a=149$, $b=46$ とおき，商の 3, 4, 5 を用いて互除法の形式をそのままたどって計算します。

$$
\begin{array}{rr}
 & \overline{\;\;\;3} \\
b) & a \\
 & \underline{3b} \\
 & a-3b
\end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{rrr}
 & \overline{\;\;\;\;\;\;4} & \overline{\;\;\;3} \\
a-3b) & b &)\,a \\
 & \underline{4a-12b} & \underline{3b} \\
 & -4a+13b & a-3b
\end{array}
$$

最終的な計算メモは次の通りです。

$$
\begin{array}{rrr}
\overline{\;\;5} & \overline{\;\;4} & \overline{\;\;\;3} \\
2)\,11 &)\,46 &)\,149 \\
\underline{10} & \underline{44} & \underline{138} \\
1 & 2 & 11
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrr}
 & \overline{\;\;\;\;\;\;5} & \overline{\;\;\;\;\;\;4} & \overline{\;\;\;3} \\
-4a+13b) & a-\;3b &)\;\;b &)\,a \\
 & \underline{-20a+65b} & \underline{4a-12b} & \underline{3b} \\
 & 21a-68b & -4a+13b & a-3b
\end{array}
$$

最後の余りを互除法の余りと比較して，$21a-68b=1$

$a=149$, $b=46$ から　　$x=21$, $y=-68$

§5. 解法 3 の省略形

解法 3 で文字を書かずに係数だけ並べて書くと少し文字数が減りますが，互除法との関係が分かりにくくなります。

$$
\begin{array}{rrr}
\overline{\;\;5} & \overline{\;\;4} & \overline{\;\;\;3} \\
2)\,11 &)\,46 &)\,149 \\
\underline{10} & \underline{44} & \underline{138} \\
1 & 2 & 11
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrrrrr}
 & & & 5 & & 4 & & 3 \\
\cline{3-4}\cline{5-6}\cline{7-8}
-4 & 13) & 1 & -3 &)\;0 & 1 &)\,1 & 0 \\
 & & -20 & 65 & 4 & -12 & 0 & 3 \\
\cline{3-4}\cline{5-6}\cline{7-8}
 & & 21 & -68 & -4 & 13 & 1 & -3
\end{array}
$$

§6. 解法 1 と解法 2 の関係

参考文献〔 2 〕を書いた当時，2 つは異なる方法であると考えていましたので，便利な裏技として**解法 2** を生徒に紹介してきました。ところが，2 つの解法は実は同じであることに気が付きました。

解法 1 の①と**解法 2** の⑷⑸，**解法 1** の②と**解法 2** の⑹は全く同じ計算をしています。**解法 2 は解法 1 の無駄を省いた記法になっているのです。**教科書の解法と同じ原理ですから，**解法 2** は単なる裏技ではなく整式の組立除法と同じ位置付けで，授業の表舞台で用いられてよい方法だと思います。

《参考文献》

〔 1 〕 小島一義「2 元 1 次不定方程式の特殊解の新しい求め方」数研通信 No.78
〔 2 〕 臼井達哉「「互除法の逆行」の記法の改良」数研通信 No.79
〔 3 〕 新課程チャート式「解法と演習　数学Ⅰ＋A」，数研出版
〔 4 〕 新課程教科書傍用「4STEP 数学Ⅰ＋A」解答編，数研出版

(岐阜県立長良高等学校)