四角形の成立条件

有田（ありた）　圭吾（けいご）

§1. 導入

数学Aの教科書では次の三角形の成立条件が紹介されている。

> **（三角形の成立条件）**
> 正の数 a，b，c を辺の長さに持つ三角形が存在する必要十分条件は
> $$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|<\boldsymbol{c}<\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

三角形の成立条件があるならば，四角形の成立条件もあるのではないかと考え，調べてみた。しかし，それらしきものは見当たらなかったので，ここにまとめる。

> **（四角形の成立条件）**
> 正の数 a，b，c，d をこの順に辺の長さに持つ四角形が存在する必要十分条件は
> $$\boldsymbol{P}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}\,\|\,\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|<\boldsymbol{x}<\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\}$$
> $$\boldsymbol{Q}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}\,\|\,\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}|<\boldsymbol{x}<\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}\}$$
> とするとき　　$\boldsymbol{P}\cap\boldsymbol{Q}\fallingdotseq\varnothing$

§2. 必要条件であること

正の数 a，b，c，d をこの順に辺の長さに持つ四角形 ABCD が存在するとき，$P\cap Q\fallingdotseq\varnothing$ を示す。

「**この順に**」とは，図1のように辺の長さが反時計回りに a，b，c，d となることを意味する。

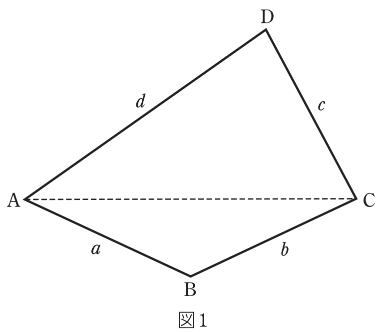

図1

(i)　四角形 ABCD が凸四角形のとき

図1のように対角線 AC を引くと，△ABC の成立条件により

$$|a-b|<\mathrm{AC}<a+b$$

すなわち　　$\mathrm{AC}\in P$

また △CDA の成立条件により

$$|c-d|<\mathrm{AC}<c+d$$

すなわち　　$\mathrm{AC}\in Q$

よって，$\mathrm{AC}\in P\cap Q$ であるから　　$P\cap Q\fallingdotseq\varnothing$

(ii)　四角形 ABCD が凹四角形のとき

$\angle\mathrm{B}>180^\circ$ と仮定してよい。

図2のように線分 AC を引けば，あとは(i)と同様に $P\cap Q\fallingdotseq\varnothing$ を示せる。

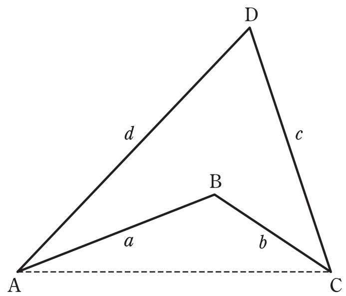

図2

§3. 十分条件であること

$P\cap Q\fallingdotseq\varnothing$ のとき，条件を満たす四角形が存在することを示す。

任意の $L\in P\cap Q$ をとる。$L\in P$ より

$$|a-b|<L<a+b$$

を満たすので，a，b，L を辺の長さに持つ △ABC が存在する。同様に $L\in Q$ より，c，d，L を辺の長さに持つ △C′DA′ が存在する。

(i)　$\angle\mathrm{A}+\angle\mathrm{A}'\fallingdotseq180^\circ$ かつ $\angle\mathrm{C}+\angle\mathrm{C}'\fallingdotseq180^\circ$ のとき

$\mathrm{AC}=\mathrm{A'C'}=L$ であるから，図3のように AC と A′C′ を合わせると条件を満たす四角形 ABCD ができる。

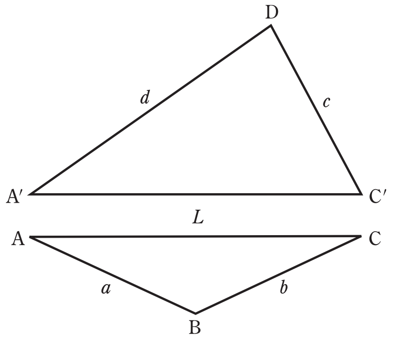

図3

(ii)　**$\angle \mathrm{A}+\angle \mathrm{A}'=180°$ …… ①**

または　$\angle \mathrm{C}+\angle \mathrm{C}'=180°$ …… ②　のとき

①と②は同時に起きないので，②を仮定してもよい。このとき，図4のように AC と A′C′ を合わせても B，C，D が一直線上にあるので図形 ABCD は四角形をなさない。

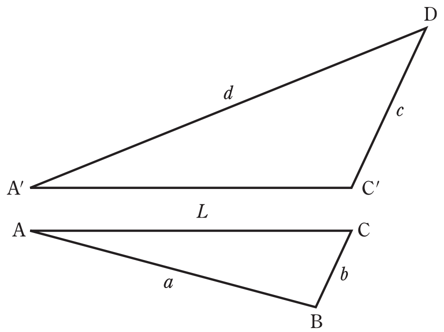

図4

②より

$$\cos C=-\cos C'$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{b^2+L^2-a^2}{2bL}=-\frac{c^2+L^2-d^2}{2cL}$$

$$\Longleftrightarrow \quad L^2=\frac{a^2c+bd^2}{b+c}-bc \quad \cdots\cdots ③$$

$L\in P\cap Q$ を取り換えて，$\angle \mathrm{C}+\angle \mathrm{C}'\fallingdotseq 180°$ を満たすように △ABC と △C′DA′ を取り直そう。

$L\in P\cap Q$ より，$L<\min(a+b,\ c+d)$ が成り立つ。このとき

$$L<L'<\min(a+b,\ c+d)$$

を満たす実数 $L'\in P\cap Q$ が必ず存在する。

$L'\in P\cap Q$ より，a，b，L' を辺の長さに持つ △XYZ と c，d，L' を辺の長さに持つ △Z′WX′ が存在する。$\angle \mathrm{Z}+\angle \mathrm{Z}'=180°$ が成り立つと仮定すると，上の議論と同様に

$$\cos Z=-\cos Z'$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{b^2+L'^2-a^2}{2bL'}=-\frac{c^2+L'^2-d^2}{2cL'}$$

$$\Longleftrightarrow \quad L'^2=\frac{a^2c+bd^2}{b+c}-bc \quad \cdots\cdots ④$$

L，L' は正の実数であるから，③，④より $L'=L$ となり，これは $L'>L$ に矛盾する。

よって $\angle \mathrm{Z}+\angle \mathrm{Z}'\fallingdotseq 180°$

X，Y，Z，W を A，B，C，D に置き換えると，図形 ABCD は四角形をなす。 …… ⑤

§4. 十分条件であること（補足）

⑤の図形 ABCD において，$\angle \mathrm{A}+\angle \mathrm{A}'=180°$ が成り立つことはない。

L を取り換える前は，②を仮定しているので，図4のように AC と A′C′ を合わせると △ABD ができる。よって，三角形の成立条件から

$$|a-d|<b+c<a+d \quad \cdots\cdots ⑥$$

が成り立つ。

また，⑤の図形 ABCD において，$\angle \mathrm{A}+\angle \mathrm{A}'=180°$ が成り立つとすると，図5のように △BCD ができるので

$$|c-b|<a+d<c+b \quad \cdots\cdots ⑦$$

が成り立つ。

⑥，⑦より $b+c<a+d<c+b$ となり矛盾するので，$\angle \mathrm{A}+\angle \mathrm{A}'=180°$ は成り立たない。

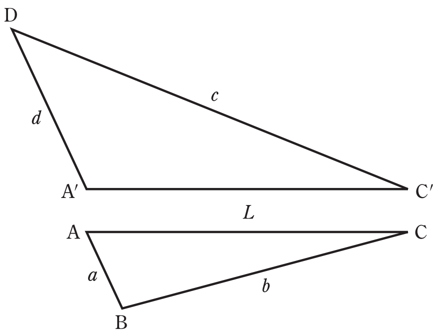

図5

《参考文献》

〔1〕 数学A，数研出版

（大阪府立千里高等学校）