優勝決定三つ巴戦における優勝確率

伊藤（いとう）　亘央（のぶお）

§1. 三つ巴戦

大相撲で，千秋楽結びの一番まで終了した時点で，最優秀成績者が同点三者出た場合，**三つ巴戦**という方式で優勝者を決定する。出場する三者が籤を引き，最初に相撲を取る二者と最初に控えに入る一者を決める。最初の相撲の勝者は続けて控えの力士と対戦し，勝った場合は優勝となる。敗れた場合は土俵を降りて控えに入り，最初の相撲の敗者が再び土俵に上がる。以後，土俵に上がって勝ち，次いで控えにいた力士にも勝って二連勝する力士が出るまで続け，その二連勝した力士が優勝となる。

本稿では，最初に相撲を取る二力士をA，B，最初に控えに入る力士をCとする。そして，その最初の相撲を“**第1戦**”，その力士にとっての最初の相撲を“**初戦**”と呼ぶことにする。A，Bにとっての初戦は第1戦のことである。

また，“**勝つ確率**”や“**互角**”の対戦などという表現を用いるが，これは二力士のその場所中の対戦結果までを含めたこれまでの対戦成績(不戦勝・不戦敗は含めない)に基づいた勝率でもって“勝つ確率”と定義することにする。例えば，AとBがこれまで20回対戦し，Aの13勝7敗であれば，AがBに勝つ確率は6割5分になり，10勝10敗であれば“互角”になる。また，三つ巴戦の途中経過としての勝敗は，この“勝つ確率”に影響がないものとする。

§2. Cは$\dfrac{1}{14}$だけ不利

実は，この三つ巴戦という方式は，全ての対戦を互角と仮定した場合，Cだけ微妙に不利になる。これを計算によって確かめたい。三者の中の誰が誰に勝つ確率をも常に$\dfrac{1}{2}$とした上で，A，B，Cが優勝する事象を各々A，B，C，またその確率を各々$P_0(A)$，$P_0(B)$，$P_0(C)$とする。

まず，Aが優勝する確率$P_0(A)$を求める。

以下，○$_{\mathrm{B}}$はAがBに勝つ，○$_{\mathrm{C}}$はAがCに勝つ，●$_{\mathrm{B}}$はAがBに敗れる，●$_{\mathrm{C}}$はAがCに敗れる，Ⓑ$_{\mathrm{C}}$はBがCに勝つ，Ⓒ$_{\mathrm{B}}$はCがBに勝つことを表す。

(Ⅰ)　Aが初戦に勝って優勝する場合とその確率

case(1)　○$_{\mathrm{B}}$○$_{\mathrm{C}}$

case(2)　○$_{\mathrm{B}}$●$_{\mathrm{C}}$Ⓑ$_{\mathrm{C}}$○$_{\mathrm{B}}$○$_{\mathrm{C}}$

case(3)　○$_{\mathrm{B}}$●$_{\mathrm{C}}$Ⓑ$_{\mathrm{C}}$○$_{\mathrm{B}}$●$_{\mathrm{C}}$Ⓑ$_{\mathrm{C}}$○$_{\mathrm{B}}$○$_{\mathrm{C}}$

case(4)　○$_{\mathrm{B}}$●$_{\mathrm{C}}$Ⓑ$_{\mathrm{C}}$○$_{\mathrm{B}}$●$_{\mathrm{C}}$Ⓑ$_{\mathrm{C}}$○$_{\mathrm{B}}$●$_{\mathrm{C}}$Ⓑ$_{\mathrm{C}}$○$_{\mathrm{B}}$○$_{\mathrm{C}}$

……

case(n)が起こる確率をp_nとすると，case(n)において，最後の●$_{\mathrm{C}}$の後はⒷ$_{\mathrm{C}}$○$_{\mathrm{B}}$○$_{\mathrm{C}}$という配列，つまり確率$\dfrac{1}{2}$の出来事が3回続きで加わるから，$p_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 p_{n-1}$である。よって，Aが初戦に勝って優勝する確率は，公比$\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$の無限等比級数として

$$p_1+p_2+p_3+\cdots\cdots+p_n+\cdots\cdots$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^8+\cdots\cdots=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^3}$$

$$=\frac{2}{8-1}=\frac{4}{14}$$

(Ⅱ)　Aが初戦に敗れて優勝する場合とその確率

case(1)　●$_{\mathrm{B}}$Ⓒ$_{\mathrm{B}}$○$_{\mathrm{C}}$○$_{\mathrm{B}}$

case(2)　●$_{\mathrm{B}}$Ⓒ$_{\mathrm{B}}$○$_{\mathrm{C}}$●$_{\mathrm{B}}$Ⓒ$_{\mathrm{B}}$○$_{\mathrm{C}}$○$_{\mathrm{B}}$

case(3)　●$_{\mathrm{B}}$Ⓒ$_{\mathrm{B}}$○$_{\mathrm{C}}$●$_{\mathrm{B}}$Ⓒ$_{\mathrm{B}}$○$_{\mathrm{C}}$●$_{\mathrm{B}}$Ⓒ$_{\mathrm{B}}$○$_{\mathrm{C}}$○$_{\mathrm{B}}$

case(4)　●$_{\mathrm{B}}$Ⓒ$_{\mathrm{B}}$○$_{\mathrm{C}}$●$_{\mathrm{B}}$Ⓒ$_{\mathrm{B}}$○$_{\mathrm{C}}$●$_{\mathrm{B}}$Ⓒ$_{\mathrm{B}}$○$_{\mathrm{C}}$●$_{\mathrm{B}}$Ⓒ$_{\mathrm{B}}$○$_{\mathrm{C}}$○$_{\mathrm{B}}$

……

case(n)が起こる確率をq_nとすると，case(n)において，最後の●$_{\mathrm{B}}$の後はⒸ$_{\mathrm{B}}$○$_{\mathrm{C}}$○$_{\mathrm{B}}$という配列が加わり(Ⅰ)の場合と同様に，$q_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 q_{n-1}$である。

よって，Aが初戦に敗れて優勝する確率は，公比 $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ の無限等比級数として

$$q_1+q_2+q_3+\cdots\cdots+q_n+\cdots\cdots$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^7+\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+\cdots\cdots=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^3}$$

$$=\frac{1}{16-2}=\frac{1}{14}$$

以上(Ⅰ)，(Ⅱ)を合わせてAが優勝する確率

$P_0(A)$ は　$P_0(A)=\frac{4}{14}+\frac{1}{14}=\frac{5}{14}$

Bが優勝する確率 $P_0(B)$ も，全く同様に

$P_0(B)=\frac{5}{14}$ である。

ところが，Cには(Ⅱ)のパターンのような初戦に敗れての優勝はなく，Cが優勝するには初戦必勝で，(Ⅰ)と同様のパターンのみであり，確率 $P_0(C)$ は

$$P_0(C)=\frac{4}{14}$$

したがって，$P_0(A):P_0(B):P_0(C)=5:5:4$ で，確率的にCは $\frac{1}{14}$ だけ不利になる。

§3. 三者の優勝する確率が $\frac{1}{3}$ ずつであるためには

§2で述べた確率は，全ての対戦を互角とする仮定のもとでの算出である。

さてそうすると，全ての対戦を互角としたときに微妙に不利になるCが，AやBよりも **“やや強い”** と仮定し直すと，その度合いによっては三者各々の優勝する確率が綺麗に $\frac{1}{3}$ ずつになるのではないだろうか。CがA，Bよりも具体的にどの程度強ければ，優勝する確率が $\frac{1}{3}$ ずつになるのかを算出したい。

AとBは互角，つまりAがBに勝つ確率，BがAに勝つ確率をともに $\frac{1}{2}$ とする。そして，CがAに勝つ確率，CがBに勝つ確率をともに $x\left(\frac{1}{2}<x<1\right)$ として，この x を求めたい。

この仮定のもとで，A，B，Cが優勝する確率を各々 $P(A)$，$P(B)$，$P(C)$ とする。$P(A)=P(B)$ は明らか。

まず，Aが優勝する確率 $P(A)$ を求める。

以下，○B，○C，●B，●C，Ⓑc，ⒸB は§2と全く同様の表記である。

(Ⅰ)　Aが初戦に勝って優勝する場合とその確率

case(1)　○B○C

case(2)　○B●CⒷC○B○C

case(3)　○B●CⒷC○B●CⒷC○B○C

case(4)　○B●CⒷC○B●CⒷC○B●CⒷC○B○C

……

case(n)が起こる確率を r_n とすると

$$r_1=\frac{1}{2}(1-x)$$

$$r_2=\frac{1}{2}x(1-x)\cdot\frac{1}{2}(1-x)$$

$$r_3=\frac{1}{2}x(1-x)\cdot\frac{1}{2}x(1-x)\cdot\frac{1}{2}(1-x)$$

$$r_4=\frac{1}{2}x(1-x)\cdot\frac{1}{2}x(1-x)\cdot\frac{1}{2}x(1-x)\cdot\frac{1}{2}(1-x)$$

……

case(n)において，最後の●C の後はⒷC○B○C という配列になり，r_n は r_{n-1} の最後の因数 $(1-x)$ を x に替えて $(1-x)\cdot\frac{1}{2}(1-x)$ を掛けた形になるから，$r_n=\frac{x}{1-x}\cdot(1-x)\cdot\frac{1}{2}(1-x)r_{n-1}$ つまり $r_n=\frac{1}{2}x(1-x)r_{n-1}$ である。よって，Aが初戦に勝って優勝する確率は，公比 $\frac{1}{2}x(1-x)$ の無限等比級数として

$$r_1+r_2+r_3+\cdots\cdots+r_n+\cdots\cdots$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(1-x)}{1-\frac{1}{2}x(1-x)}=\frac{1-x}{2-x(1-x)}=\frac{1-x}{x^2-x+2}$$

……①

(Ⅱ)　Aが初戦に敗れて優勝する場合とその確率

case(1)　●BⒸB○C○B

case(2)　●BⒸB○C●BⒸB○C○B

case(3)　●BⒸB○C●BⒸB○C●BⒸB○C○B

case(4)　●BⒸB○C●BⒸB○C●BⒸB○C●BⒸB○C○B

……

case(n)が起こる確率を s_n とすると

$$s_1=\frac{1}{2}x(1-x)\cdot\frac{1}{2}$$

$$s_2=\frac{1}{2}x(1-x)\cdot\frac{1}{2}x(1-x)\cdot\frac{1}{2}$$

$$s_3=\frac{1}{2}x(1-x)\cdot\frac{1}{2}x(1-x)\cdot\frac{1}{2}x(1-x)\cdot\frac{1}{2}$$

$$s_4=\frac{1}{2}x(1-x)\cdot\frac{1}{2}x(1-x)\cdot\frac{1}{2}x(1-x)\cdot\frac{1}{2}x(1-x)\cdot\frac{1}{2}$$

……

case(n)において，最後の●$_B$の後はⒸ$_B$○$_C$○$_B$という配列が加わるから，$s_n=\frac{1}{2}x(1-x)s_{n-1}$ である。よって，Aが初戦に敗れて優勝する確率は，公比 $\frac{1}{2}x(1-x)$ の無限等比級数として

$$s_1+s_2+s_3+\cdots\cdots+s_n+\cdots\cdots$$
$$=\frac{\frac{1}{2}x(1-x)\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}x(1-x)}=\frac{x(1-x)}{4-2x(1-x)}=\frac{x(1-x)}{2(x^2-x+2)} \quad \cdots\cdots ②$$

以上(I)，(II)を合わせてAが優勝する確率 $P(A)$ は，①+② より

$$P(A)=\frac{1-x}{x^2-x+2}+\frac{x(1-x)}{2(x^2-x+2)}$$
$$=\frac{-x^2-x+2}{2(x^2-x+2)} \quad \cdots\cdots ③$$

全く同様に　　$P(B)=\frac{-x^2-x+2}{2(x^2-x+2)}$

次に，Cが優勝する確率 $P(C)$ を求める。AとBは互角としているから，第１戦でAが勝ってもBが勝ってもCにとっての計算上の影響は全くないので，ここでは第１戦でAが勝ったものとした表記をする。以下，○$_A$はCが第１戦の勝者に勝つ，○$_B$はCが第１戦の敗者に勝つ，●$_B$はCが第１戦の敗者に敗れる，Ⓐ$_B$は第１戦の勝者が第１戦の敗者に再度勝つことを意味する表記と解釈されたい。

case⑴　○$_A$○$_B$
case⑵　○$_A$●$_B$Ⓐ$_B$○$_A$○$_B$
case⑶　○$_A$●$_B$Ⓐ$_B$○$_A$●$_B$Ⓐ$_B$○$_A$○$_B$
case⑷　○$_A$●$_B$Ⓐ$_B$○$_A$●$_B$Ⓐ$_B$○$_A$●$_B$Ⓐ$_B$○$_A$○$_B$
……

case(n)が起こる確率を t_n とすると

$$t_1=xx$$

$$t_2=x(1-x)\cdot\frac{1}{2}xx$$

$$t_3=x(1-x)\cdot\frac{1}{2}x(1-x)\cdot\frac{1}{2}xx$$

$$t_4=x(1-x)\cdot\frac{1}{2}x(1-x)\cdot\frac{1}{2}x(1-x)\cdot\frac{1}{2}xx$$

……

case(n)において，最後の●$_B$の後はⒶ$_B$○$_A$○$_B$という配列になり，t_n は t_{n-1} の最後の因数 x を $(1-x)$ に替えて $\frac{1}{2}xx$ を掛けた形になるから，

$t_n=\frac{1-x}{x}\cdot\frac{1}{2}xxt_{n-1}$ つまり $t_n=\frac{1}{2}x(1-x)t_{n-1}$ である。よって，Cが優勝する確率 $P(C)$ は，公比 $\frac{1}{2}x(1-x)$ の無限等比級数として

$$P(C)=t_1+t_2+t_3+\cdots\cdots+t_n+\cdots\cdots$$
$$=\frac{x^2}{1-\frac{1}{2}x(1-x)}=\frac{2x^2}{2-x(1-x)}$$
$$=\frac{2x^2}{x^2-x+2} \quad \cdots\cdots ④$$

ここまでをまとめると，③，④より

$$P(A)=P(B)=\frac{-x^2-x+2}{2(x^2-x+2)},\quad P(C)=\frac{2x^2}{x^2-x+2}$$

そこで，$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$ になるときを調べる。

まず，$P(A)=P(B)=\frac{-x^2-x+2}{2(x^2-x+2)}=\frac{1}{3}$ のとき

$$2(x^2-x+2)=3(-x^2-x+2)$$
$$\Longleftrightarrow\ 5x^2+x-2=0 \quad \cdots\cdots ⑤$$

次に，$P(C)=\frac{2x^2}{x^2-x+2}=\frac{1}{3}$ のとき

$$x^2-x+2=3(2x^2)$$
$$\Longleftrightarrow\ 5x^2+x-2=0$$

これは⑤と一致する。⑤の解は

$x>0$ より　　$x=\frac{\sqrt{41}-1}{10}=0.5403124\cdots\cdots\fallingdotseq 0.54$

したがって，AとBの対戦が互角，CのA，B各々に対する勝つ確率が５割４分であると仮定すると，優勝決定三つ巴戦における各々の優勝する確率はほぼ $\frac{1}{3}$ ずつで，最も面白い。勝つ確率５割４分というのは，対戦成績27勝23敗に相当する。

§4. 優勝決定三つ巴戦ファンタジー

千秋楽結びの一番が終了した時点で，14 勝以上の力士がいなく，A13 勝 2 敗，B13 勝 2 敗，C13 勝 2 敗で，この三力士が最優秀成績で並ぶ。対戦成績は，AとBは 34 回対戦して 17 勝ずつ，Cは対A戦 27 勝 23 敗，対B戦も 27 勝 23 敗。初めに三者が籤を引き，AとBが最初に相撲を取り，Cは最初に控えに入る。

A，B，Cの三者各々の優勝する確率は $\frac{1}{3}$ ずつ。館内の盛り上がりは最高潮に達する。

（愛知県　名古屋国際中学校・高等学校）