放物線と曲率円

松田　康雄（まつだ　やすお）

§1. はじめに

本稿では，放物線と接する特別な円を考える。そのために，まず次の問題を考えよう。

> **【問題】**
> 円 C：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ $(r>0)$ ……①
> は，放物線 G：$y=cx^2$ $(c>0)$ ……②
> と，原点O以外の点P(x 座標が p)で接し，他に点Q(x 座標が q)のみで交わる(が接しない)とする。円Cの方程式①を求めよ。

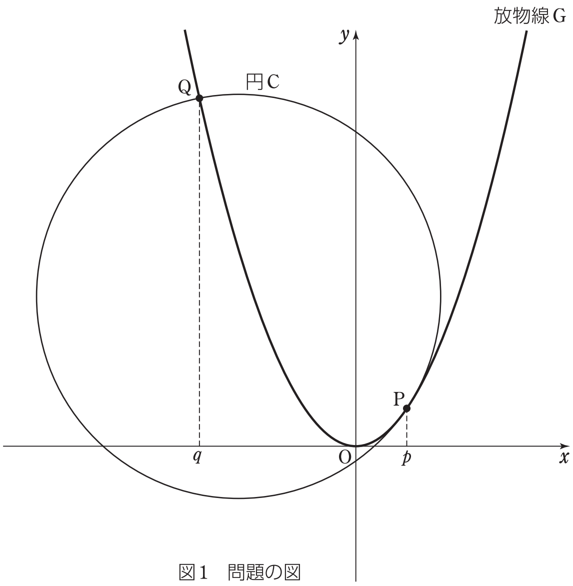

図1　問題の図

§2. 問題の解答

②を①に代入してできる x の4次方程式

$$c^2x^4-(2bc-1)x^2-2ax+a^2+b^2-r^2=0 \quad \cdots ③$$

は解 $x=p$（3重解)と q をもつので，4次方程式の解と係数の関係から

$$3p+q=0,\ 3p^2+3pq=-\frac{2bc-1}{c^2},$$

$$p^3+3p^2q=\frac{2a}{c^2},\ p^3q=\frac{a^2+b^2-r^2}{c^2}$$

が成り立つ。第1式より

$$q=-3p \quad \cdots\cdots ④$$

が成り立つ。④から，それぞれ

$$b=3cp^2+\frac{1}{2c},$$

$$a=-4c^2p^3,$$

$$r^2=\frac{1}{4c^2}(4c^2p^2+1)^3 \quad \cdots\cdots ⑤$$

が成り立つ。したがって，円Cの方程式①は

$$(x+4c^2p^3)^2+\left(y-3cp^2-\frac{1}{2c}\right)^2=\frac{(4c^2p^2+1)^3}{4c^2}$$

となる。

§3. 曲率円

実は，円Cは点Pにおける放物線②の「**曲率円**」である。曲率円とは，その曲線の曲がり具合を最もよく近似する円のことである。

曲線 $y=f(x)$ 上の点P(x 座標が p)における曲率円の半径は

$$\frac{\{1+(f'(p))^2\}^{\frac{3}{2}}}{|f''(p)|}$$

で与えられる。$f(x)=cx^2$ とすると⑤が得られる。($p=0$ の場合も含めて。)

放物線Gと点Pで接し，放物線Gの焦点 $\mathrm{F}\left(0,\ \dfrac{1}{4c}\right)$ を通る円を「**焦点円**」と呼ぶことにする。次の定理が成り立つ。

> **【定理】** 曲率円の半径は，焦点円の半径の4倍である。

証明

点Pが放物線Gの頂点($p=0$)のとき，曲率円の半径は⑤から $\dfrac{1}{2c}$，焦点円の半径は $\dfrac{1}{2}\mathrm{OF}=\dfrac{1}{8c}$ であるから，定理が成り立つ。

点Pが原点O以外のとき，点Pにおける放物線Gの接線をl，直線 $x=p$ を直線mとおく。放物線の性質から

（直線mと接線lのなす角度）

＝（直線PFと接線lのなす角度）

（＝α とおく）

が成り立つ。

接線lの傾きは，$y'=2cx$ から $2cp$ である。一方，④から $\mathrm{Q}(-3p,\ 9cp^2)$ であるから，直線PQの傾きは $\dfrac{9cp^2-cp^2}{-3p-p}=-2cp$ である。したがって，

接線lと直線PQは直線mに関して対称 ……⑥

であるから

（直線PQと直線mのなす角度）＝α

が成り立つ。直線PQとy軸との交点をRとする。直線mとy軸が平行であるから

$\angle \mathrm{FRP}=\alpha$

が成り立ち，接弦定理の逆から，点Rは円Fの周上の点である。点P，Q，Rのx座標を比べて

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=4\overrightarrow{\mathrm{PR}}$

となるので，曲率円は点Pを中心に焦点円を4倍に拡大した円であるから，定理が示される。 終

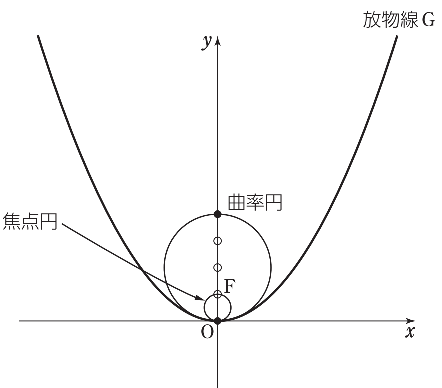

図2　頂点における曲率円

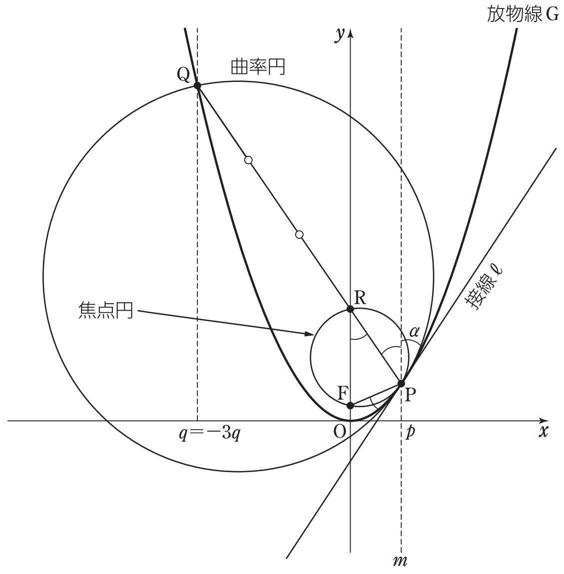

図3　定理の証明の図

§4. 曲率円の作図法

⑥から次のような曲率円の作図法が示される。

1．点Pにおける放物線Gの接線lと法線（nとする）をかく。

2．直線mに関して，接線lと対称な直線をかき，放物線Gとの交点をQとする。

3．法線n上に点Tを $\angle \mathrm{PQT}=90^\circ$ となるようにとる。

4．点P，Tを直径の両端とする円をかく。これが曲率円。

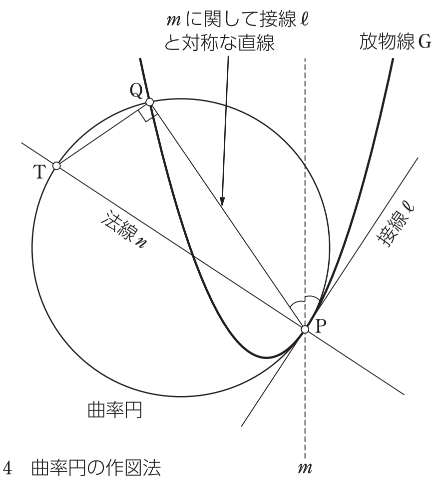

図4　曲率円の作図法

§5. おわりに

4次方程式③は実数解を最大4個もつ。そのうち3個が重解の場合を考えたのが研究のきっかけである。(4個とも重解はない。)それは放物線の曲率円になる場合であった。放物線の曲率円が放物線と3重に接するのは興味深いことである。焦点を通る円の半径の4倍からその大きさもイメージしやすい。また，割に簡単に作図できることも嬉しいことである。

《参考文献》

〔1〕 坪井俊，ベクトル解析と幾何学，朝倉書店，2002年，27-29

〔2〕 改訂版チャート式基礎からの数学Ⅲ，数研出版，2019年，p.115

(有明工業高等専門学校　非常勤講師)